

# Ruptura de la equipartición de energía en mezclas granulares fluidas

Andrés Santos\*



Departamento de Física, Universidad de Extremadura, Badajoz



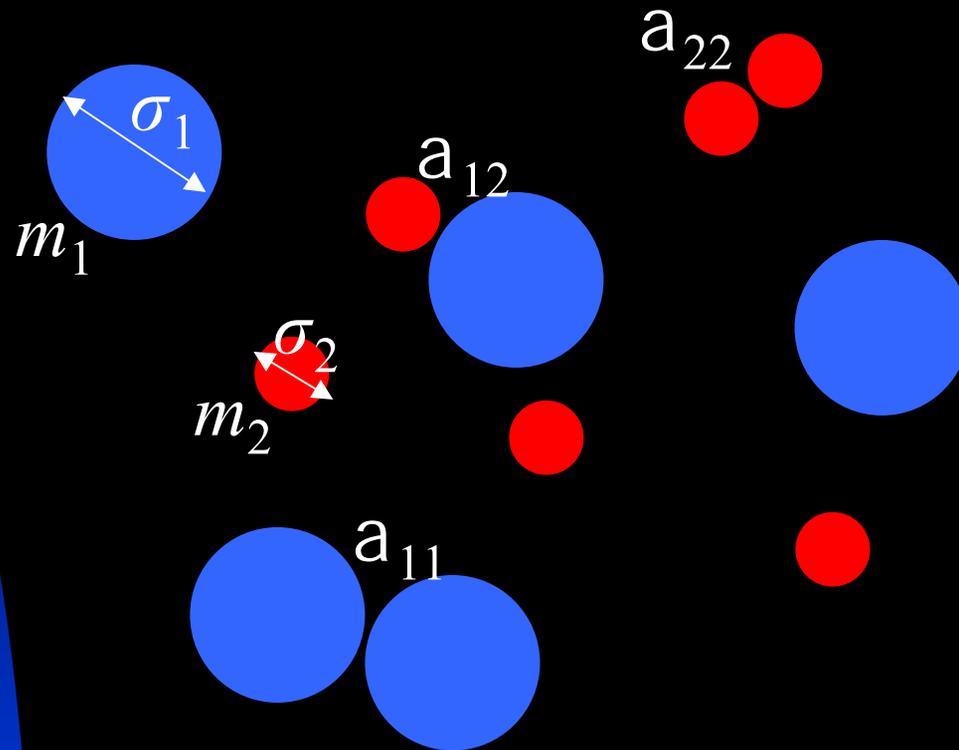
\*En colaboración con J.W. Dufty

Ciclo de seminarios del  
Dpto. de Física  
13 de noviembre, 2003

# Plan de la charla

- Introducción (3-5)
- Teoría cinética (6-8)
- Ejemplos (9-13)
- Diagramas de fase (14-24)
- Conclusiones (25-26)

# Mezcla granular binaria



## Breakdown of Energy Equipartition in a 2D Binary Vibrated Granular Gas

Klebert Feitosa\* and Narayanan Menon†

*Department of Physics, University of Massachusetts, Amherst, Massachusetts 01003-3720*

TABLE I. Some material properties of the spheres used in the experiment.

Particle	Mass [mg]	Effective inelasticity <sup>a</sup>	Mass ratio w/glass
Glass	5.24	0.17	—
Aluminum	5.80	0.31	0.92
Steel	15.80	0.21	0.33
Brass	18.00	0.39	0.28

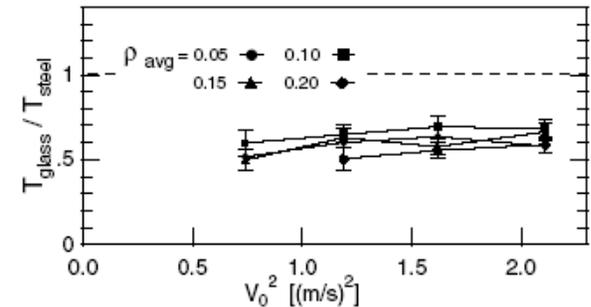


FIG. 4. Temperature ratio,  $\gamma = T_{\text{glass}}/T_{\text{steel}}$ , in a steel-glass mixture plotted against squared vibration velocity,  $v_0^2$ . Different markers represent different number densities of the mixture. The number fraction is fixed at  $x = 1/2$ . The horizontal dashed line represents equipartition ( $\gamma = 1$ ).

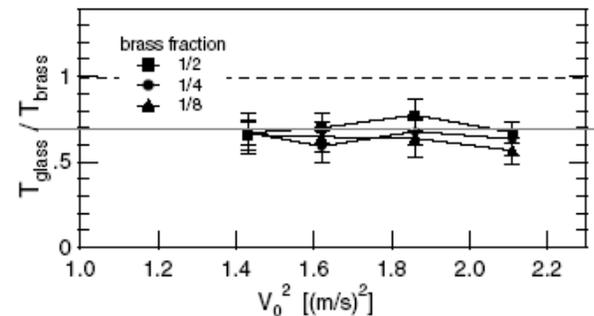


FIG. 5. Temperature ratio,  $\gamma = T_{\text{glass}}/T_{\text{brass}}$ , in a brass-glass mixture versus the squared vibration velocity of the cell,  $v_0^2$ . Different markers represent different number fractions of brass for the same total number of particles ( $\rho_{\text{avg}} = 0.049$ ). The horizontal dashed line represents equipartition ( $\gamma = 1$ ).

# Formulación del problema

- Mezcla binaria de esferas duras inelásticas

- ✓ Especie pesada (1):

- $m_1, \sigma_1, x_1 = n_1/n, a_{11}, a_{12}.$

- ✓ Especie ligera (2):

- $m_2, \sigma_2, x_2 = n_2/n = 1 - x_1, a_{22}, a_{21} = a_{12}.$

- En el estado de enfriamiento homogéneo,

- $m_1 \rightarrow m_2, v_1^2 \dot{U}, v_2^2 \dot{U} \neq ?$

# Ecuación de Enskog-Boltzmann

$$\partial_t f_1(v) = J_{11}[f_1, f_1] + J_{12}[f_1, f_2]$$

$$\partial_t f_2(v) = J_{21}[f_2, f_1] + J_{22}[f_2, f_2]$$

$$\partial_t \langle v_1^2 \rangle = -\zeta_1 \langle v_1^2 \rangle, \quad \partial_t \langle v_2^2 \rangle = -\zeta_2 \langle v_2^2 \rangle$$

$$\zeta_1 = \nu (\xi_{11} + \xi_{12}), \quad \zeta_2 = \nu (\xi_{21} + \xi_{22})$$

Tasas de enfriamiento

Tasas de termalización

$$\nu = \frac{8\pi}{3} n g_{12} \sigma_{12}^2 \langle v_2 \rangle \frac{1 + \alpha_{12}}{2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Frecuencia de colisión efectiva

# Parámetro de “orden”

$$\phi \equiv \frac{\langle v_1^2 \rangle}{\langle v_2^2 \rangle}$$

$$\partial_t \phi = - (\zeta_1 - \zeta_2) \phi$$

Condición para  
valor estacionario:

$$\zeta_1 = \zeta_2$$

# Aproximación maxwelliana

PHYSICAL REVIEW E

VOLUME 60, NUMBER 5

NOVEMBER 1999

Homogeneous cooling state for a granular mixture

Vicente Garzó\* and James Dufty

$$f_i(v) = n_i \left( \frac{m_i}{2\pi T_i} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_i v^2}{2T_i} \right), \quad \langle v_i^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{2T_i}{m_i}$$

$$h_2 \sim \frac{m_2}{m_1} \ll 1$$

$$\xi_{11}(\phi) \rightarrow x_1 \sqrt{\phi} \beta_1, \quad \xi_{12}(\phi) \rightarrow x_2 \sqrt{1+\phi} \left( 1 - \frac{h_2}{\phi} \right),$$

tasas de enfriamiento

tasas de termalización

$$\xi_{22}(\phi) \rightarrow x_2 \beta_2, \quad \xi_{21}(\phi) \rightarrow x_1 \sqrt{1+\phi} h_1^2 \left( 1 + \frac{\phi_0 - \phi}{h_2} \right)$$

$$\beta_1 \sim \frac{1 - \alpha_{11}^2}{h_2}, \quad \beta_2 \sim \frac{1 - \alpha_{22}^2}{h_2} \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2$$

$$\phi_0 = \frac{1 - \alpha_{12}}{1 + \alpha_{12}}, \quad h_1 = \frac{1 + \alpha_{12}}{2}$$

Colisiones elásticas:  $\phi=h_2$   $T_1/T_2=1$  ¡Equipartición de energía!

Ciclo de seminarios del

Dpto. de Física

13 de noviembre, 2003

# Unos cuantos ejemplos representativos

- 1. Colisiones cruzadas cuasi-elásticas:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1, \quad 1 - \alpha_{12} = O(h_2)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \phi_0 \sim h_2$$

$$\xi_{11}(\phi) = 0, \quad \xi_{12}(\phi) \rightarrow x_2 \left( 1 - \frac{h_2}{\phi} \right),$$

$$\xi_{22}(\phi) = 0, \quad \xi_{21}(\phi) \rightarrow x_1 \left( 1 + \frac{\phi_0 - \phi}{h_2} \right)$$

$$h_2 < \phi < h_2 + \phi_0$$

Ruptura **débil** de la equipartición de energía  
 $f \sim h_2, T_1 \sim T_2$

**Estado “normal”**

■ 2. Colisiones cruzadas inelásticas :

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1, \quad 1 - \alpha_{12} = O(1)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \phi_0 \lesssim 1$$

$$\phi = \phi_0 = \frac{1 - \alpha_{12}}{1 + \alpha_{12}}$$

Independientemente de las concentraciones  $i$

$$\xi_{11}(\phi) = 0, \quad \xi_{12}(\phi) \rightarrow x_2,$$

$$\xi_{22}(\phi) = 0, \quad \xi_{21}(\phi) \rightarrow x_1 \sqrt{1 + \phi} h_1^2 \frac{\phi_0 - \phi}{h_2}$$

{ No dinámica browniana ( $x_1 \ddot{0} = 0$ )  
 { No gas de Lorentz ( $x_2 \ddot{0} = 0$ )

Ruptura **fuerte** de la equipartición de energía

$$f \sim 1, \quad T_1 / T_2 \ddot{0} \quad \uparrow$$

**Estado “ordenado”**

■ 3. Colisiones pesada-pesada inelásticas:

$$\alpha_{12} = \alpha_{22} = 1, \quad 1 - \alpha_{11} = O(1)$$

$$\beta_2 = \phi_0 = 0, \quad \beta_1 \sim h_2^{-1}$$

$$\xi_{11}(\phi) \rightarrow x_1 \sqrt{\phi} \beta_1, \quad \xi_{12}(\phi) \rightarrow -x_2 \frac{h_2}{\phi}$$

$$\xi_{22}(\phi) = 0, \quad \xi_{21}(\phi) \rightarrow x_1$$

$$\phi \sim h_2^{4/3} \rightarrow 0, \quad T_1/T_2 \sim h_2^{1/3} \rightarrow 0$$

De nuevo, ruptura **fuerte** de la equipartición de energía

## Estado “sub-normal”

- 4. Colisiones ligera-ligera inelásticas + tamaños dispares:

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = 1, \quad 1 - \alpha_{22} = O(1), \quad s_i \sim m_i^{1/3}$$

$$\beta_1 = \phi_0 = 0, \quad \beta_2 \sim h_2^{-1/3}$$

$$\xi_{11}(\phi) = 0, \quad \xi_{12}(\phi) \rightarrow x_2$$

$$\xi_{22}(\phi) \rightarrow x_2 \beta_2, \quad \xi_{21}(\phi) \rightarrow -x_1 \frac{\phi}{h_2}$$

$$\phi \sim h_2^{2/3} \rightarrow 0, \quad T_1/T_2 \sim h_2^{-1/3} \rightarrow \infty$$

Intermedio entre los estados normal y ordenado

Estado “sub-ordenado” (o “super-normal”)

- 5. Colisiones ligera-ligera inelásticas + límite browniano:

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = 1, \quad 1 - \alpha_{22} = O(1), \quad x_1 = O(h_2)$$

$$\beta_1 = \phi_0 = 0, \quad \beta_2 \sim h_2^{-1}$$

$$\xi_{11}(\phi) = 0, \quad \xi_{12}(\phi) \rightarrow \phi^{1/2}$$

$$\xi_{22}(\phi) \rightarrow \beta_2, \quad \xi_{21}(\phi) \rightarrow -\frac{x_1}{h_2} \phi^{3/2}$$

$$\phi \sim h_2^{-2/3} \rightarrow \infty$$

Ruptura **muy fuerte** de la equipartición de energía

**Estado “super-ordenado”**

# Clasificación de los estados

$$h_2 \sim \frac{m_2}{m_1}, \quad \phi = \frac{\langle v_1^2 \rangle}{\langle v_2^2 \rangle} \sim h_2^\eta, \quad \frac{T_1}{T_2} \sim h_2^{\eta-1}$$

State	$\eta$	$\langle v_1^2 \rangle / \langle v_2^2 \rangle$	$T_1 / T_2$	Example
Sub-normal	$\eta > 1$	0	0	$\alpha_{11} < 1$
Normal	$\eta = 1$	0	finite	$1 - \alpha_{12} \sim m_2 / m_1$
Sub-ordered	$0 < \eta < 1$	0	$\infty$	$\alpha_{12} < 1$
Ordered	$\eta = 0$	finite	$\infty$	$\alpha_{22} < 1, \sigma_i \sim m_i^{1/3}$
Super-ordered	$\eta < 0$	$\infty$	$\infty$	$\alpha_{22} < 1, x_1 \sim m_2 / m_1$

# Leyes de escala

$$1 - \alpha_{11} \sim h_2^{a_1}, \quad (1 - \alpha_{22})(\sigma_2/\sigma_1)^2 \sim h_2^{a_2}, \quad 1 - \alpha_{12} \sim h_2^b$$

$a_1=0$  Colisiones pesada-pesada inelásticas  
 $a_1=1$  Colisiones pesada-pesada elásticas

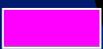
$b=0$  Colisiones cruzadas inelásticas  
 $b=1$  Colisiones cruzadas elásticas

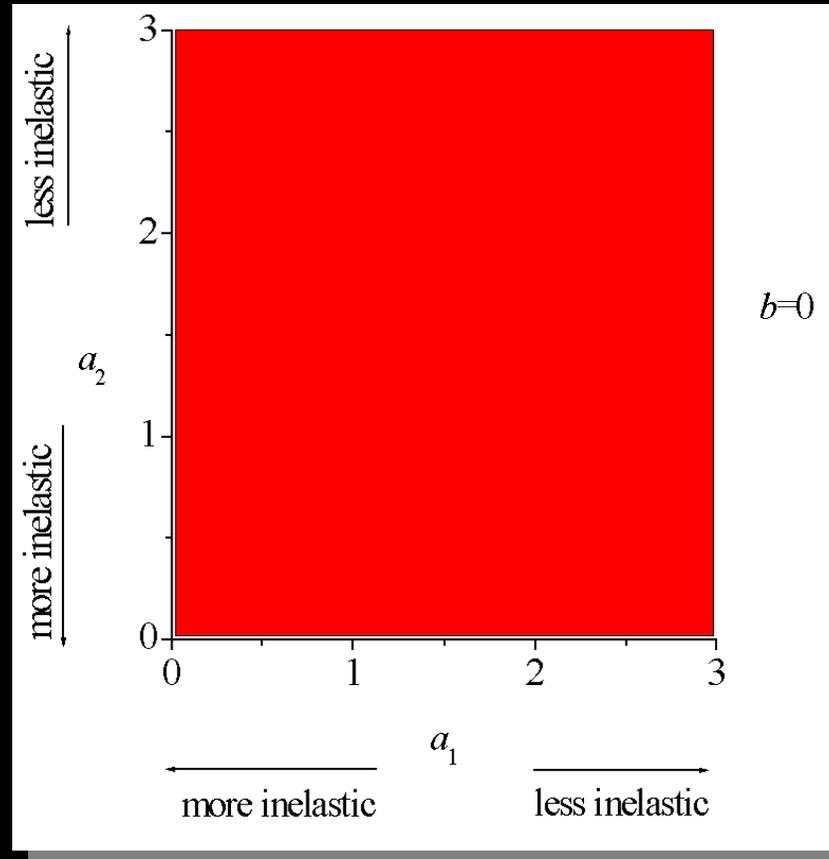
$a_2=0$  Colisiones ligera-ligera inelásticas + tamaños comparables  
 $a_2=1$  Colisiones ligera-ligera elásticas

$$\phi \sim h_2^\eta, \quad \eta \stackrel{?}{=} \eta(a_1, a_2, b)$$

# Diagrama de fases (concentraciones finitas)

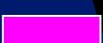
## Colisiones cruzadas inelásticas

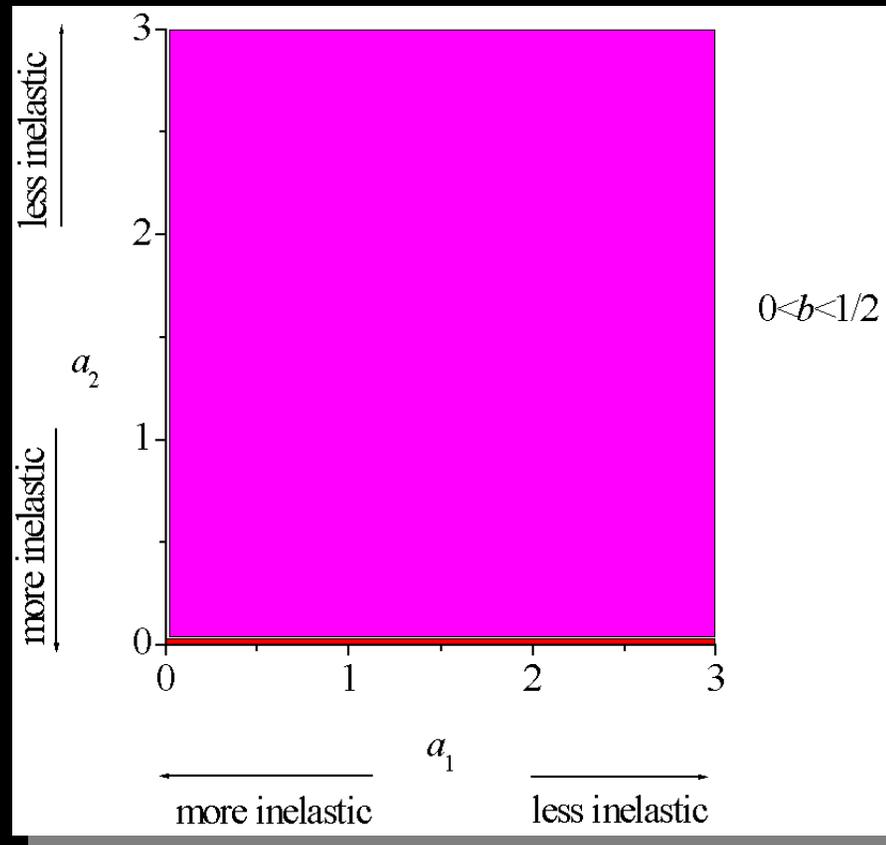
Sub-normal	
Normal	
Sub-ordenado	
Ordenado	
Super-ordenado	



# Diagrama de fases (concentraciones finitas)

Colisiones cruzadas débilmente cuasi-elásticas

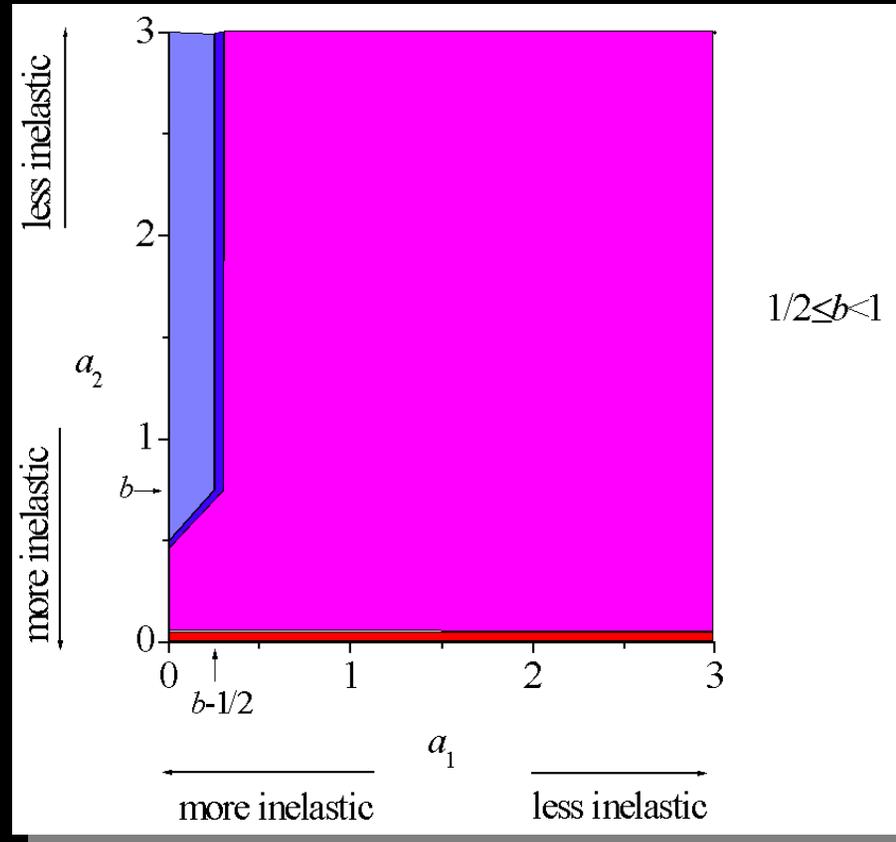
Sub-normal	
Normal	
Sub-ordenado	
Ordenado	
Super-ordenado	



# Diagrama de fases (concentraciones finitas)

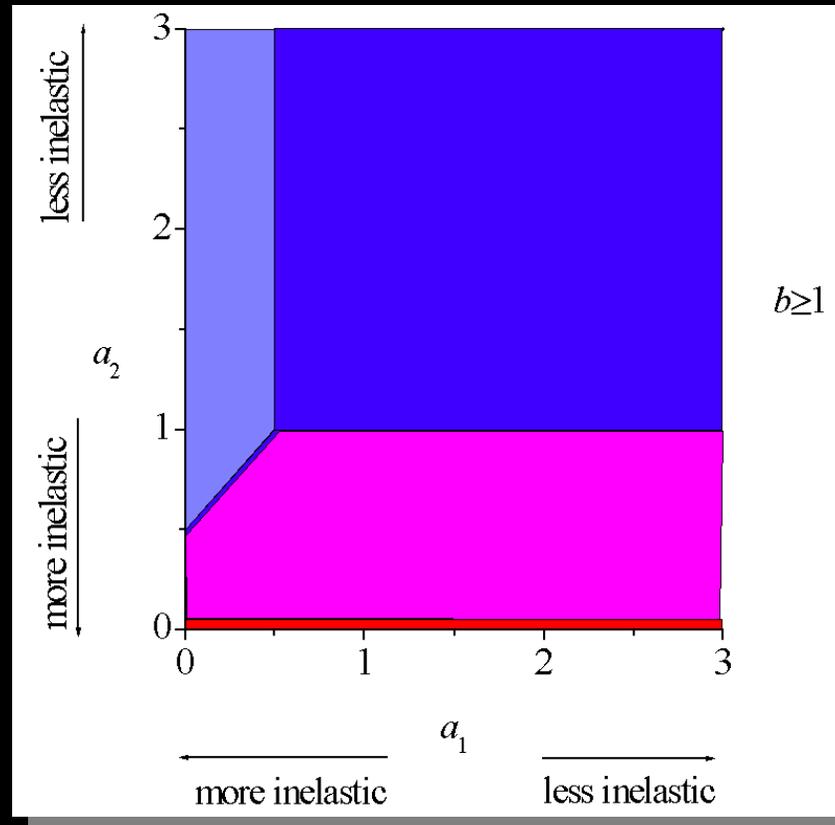
## Colisiones cruzadas cuasi-elásticas

Sub-normal	
Normal	
Sub-ordenado	
Ordenado	
Super-ordenado	



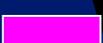
# Diagrama de fases (concentraciones finitas)

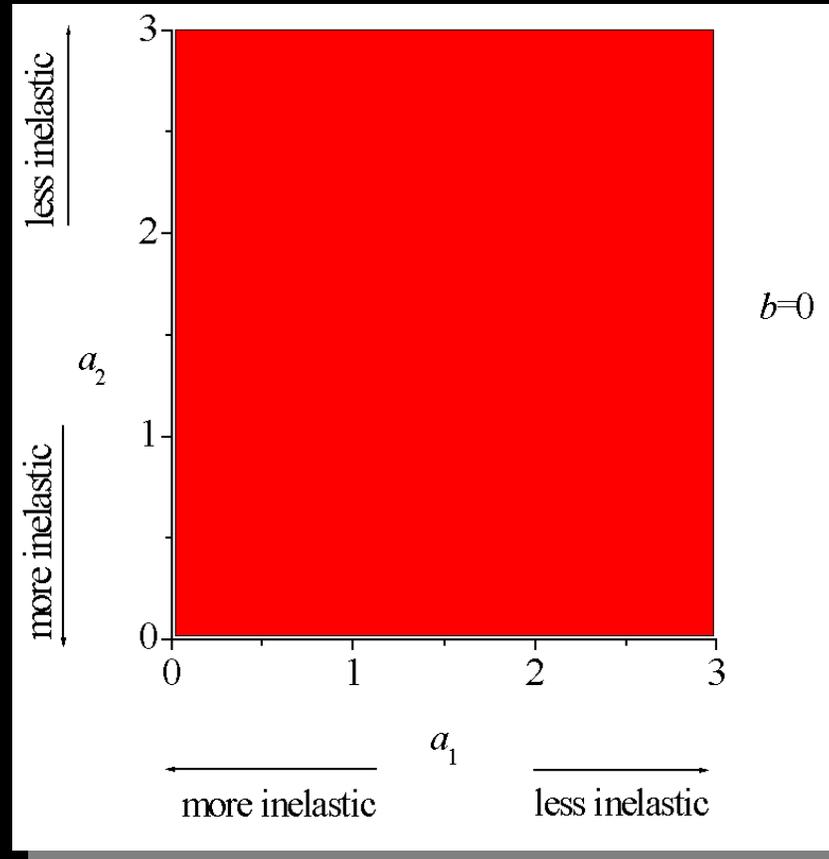
Colisiones cruzadas fuertemente cuasi-elásticas



# Diagrama de fases (concentraciones finitas)

## Colisiones cruzadas inelásticas

Sub-normal	
Normal	
Sub-ordenado	
Ordenado	
Super-ordenado	

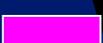


$$1 - \alpha_{12} = \mathcal{O}(1)$$

$$1 - \alpha_{11} \sim h_2^{a_1}$$

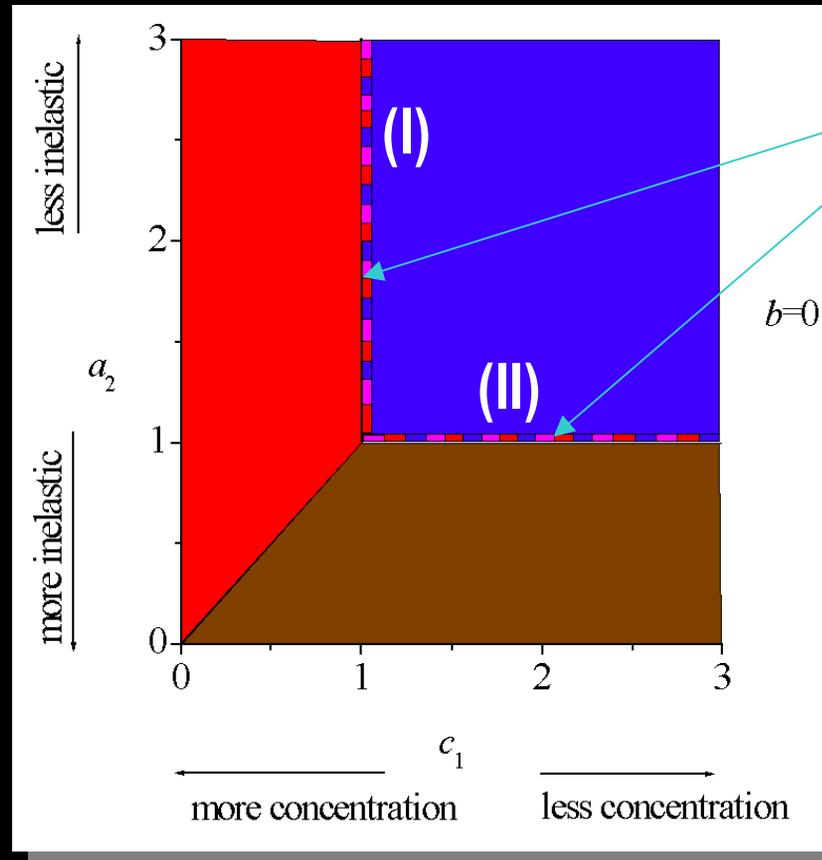
$$(1 - \alpha_{22})(\sigma_2/\sigma_1)^2 \sim h_2^{a_2}$$

$$x_1 \sim h_2^{c_1}$$

Sub-normal	
Normal	
Sub-ordenado	
Ordenado	
Super-ordenado	

# Diagrama de fases (Límite browniano)

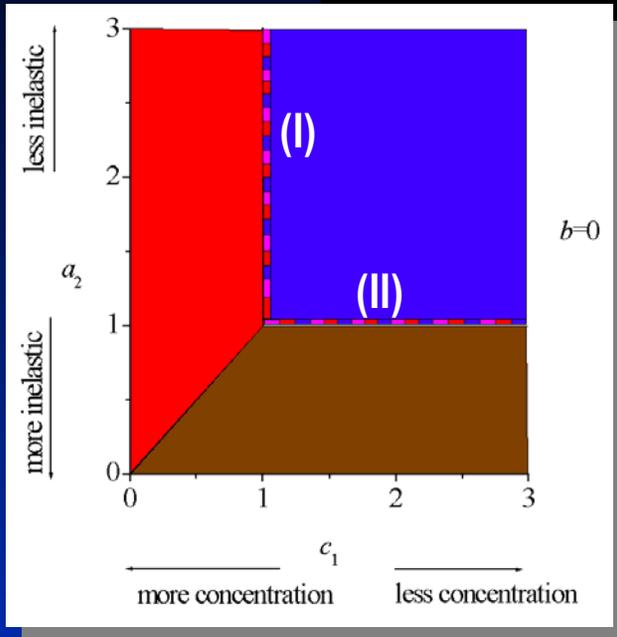
Colisiones cruzadas inelásticas



Líneas críticas

# Líneas críticas (Límite browniano)

$$(I) x_1 \sim h_2, b_2 \ddot{O} 0$$



$$\frac{x_1}{h_2} \frac{1 - \alpha_{12}^2}{4} \begin{cases} < 1 \Rightarrow \phi \sim h_2 \\ = 1 \Rightarrow \phi \sim h_2^{1/2} \\ > 1 \Rightarrow \phi \sim 1 \end{cases}$$

normal  
sub-ordenado  
ordenado

$$(II) 1 - a_{22} \sim h_2, x_1/h_2 \ddot{O} 0$$

$$\beta_2 \begin{cases} < 1 \Rightarrow \phi \sim h_2 \\ = 1 \Rightarrow \phi \sim h_2^{1/2} \\ > 1 \Rightarrow \phi \sim 1 \end{cases}$$

normal  
sub-ordenado  
ordenado

# Caso (II) $1 - a_{22} \sim h_2, x_1/h_2 \ddot{O} 0$

VOLUME 86, NUMBER 21

PHYSICAL REVIEW LETTERS

21 MAY 2001

## Critical Behavior of a Heavy Particle in a Granular Fluid

Andrés Santos\* and James W. Dufty†

PHYSICAL REVIEW E, VOLUME 64, 051305

## Nonequilibrium phase transition for a heavy particle in a granular fluid

Andrés Santos\* and James W. Dufty†

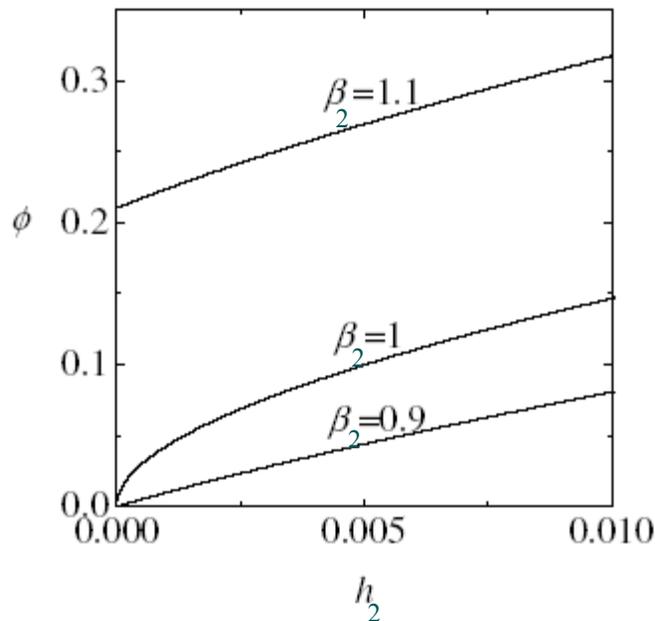


FIG. 1. Ratio of mean square velocities,  $\phi$ , as a function of the mass ratio parameter  $h$  for  $\beta = 0.9, 1$ , and  $1.1$ .

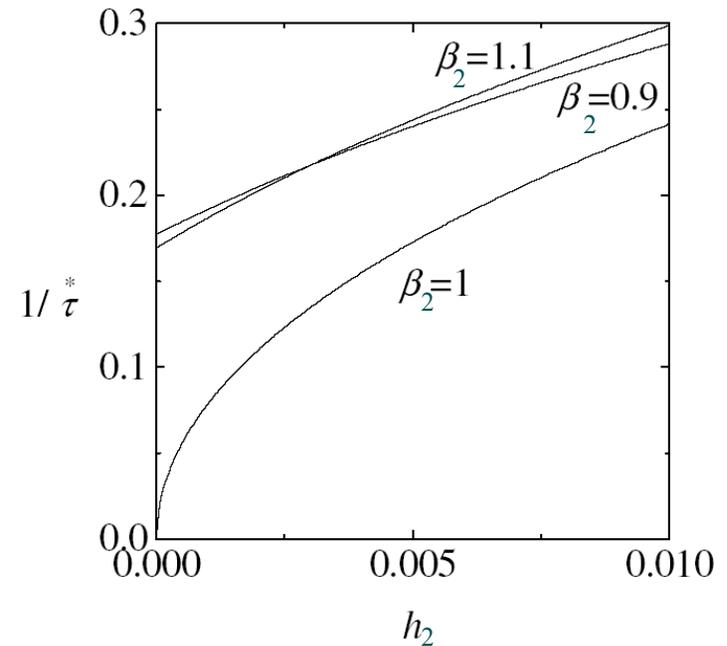


FIG. 3. Inverse characteristic time  $\tau^{*-1} \equiv (\nu^* \tau)^{-1}$  as a function of the mass ratio parameter  $h$  for  $\beta = 0.9, 1$ , and  $1.1$ .

# Caso (II) $1 - a_{22} \sim h_2, x_1/h_2 \ddot{O} 0$

¿Es fiable la aproximación maxwelliana?

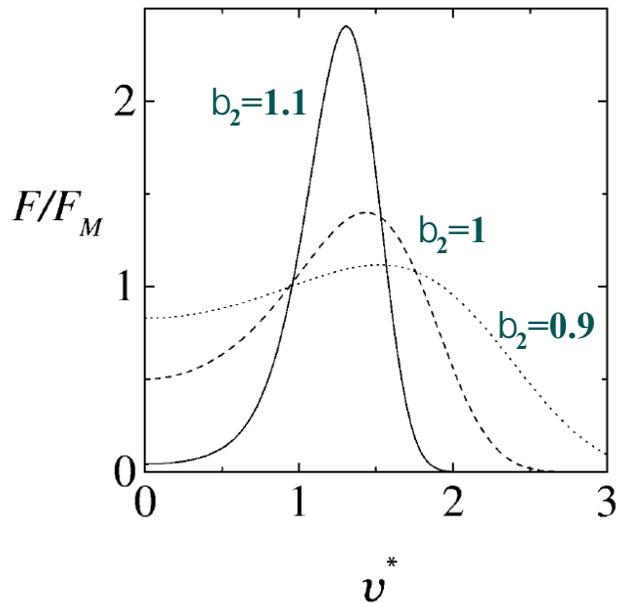


FIG. 4. Velocity distribution function of the impurity particle,  $F$ , relative to the Maxwellian,  $F_M$ , for  $h = 10^{-2}$  and  $\beta = 0.9$  (dotted line),  $\beta = 1$  (dashed line), and  $\beta = 1.1$  (solid line).

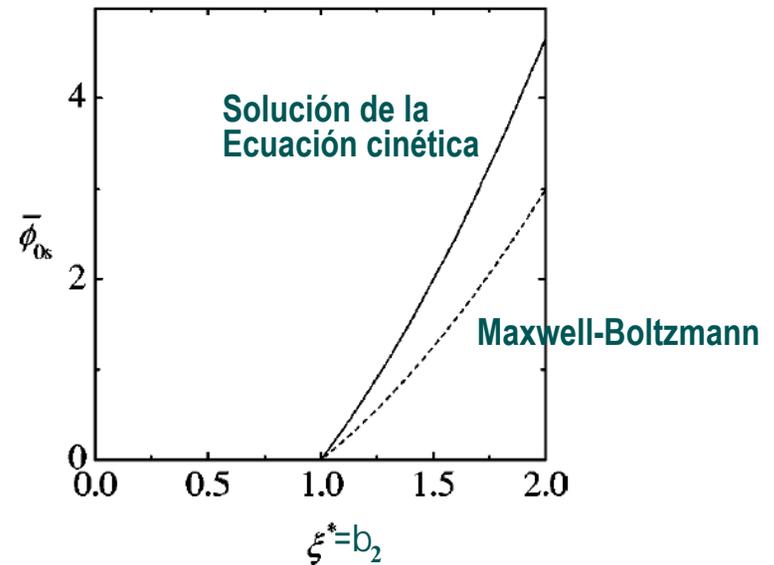


FIG. 9. Plot of the order parameter in the deterministic limit,  $\bar{\phi}_{0s}$ , as a function of  $\xi^*$ . The dashed line is the maximum entropy estimate  $\bar{\phi}_s = \xi^{*2} - 1$  of Sec. II.

# Conclusiones

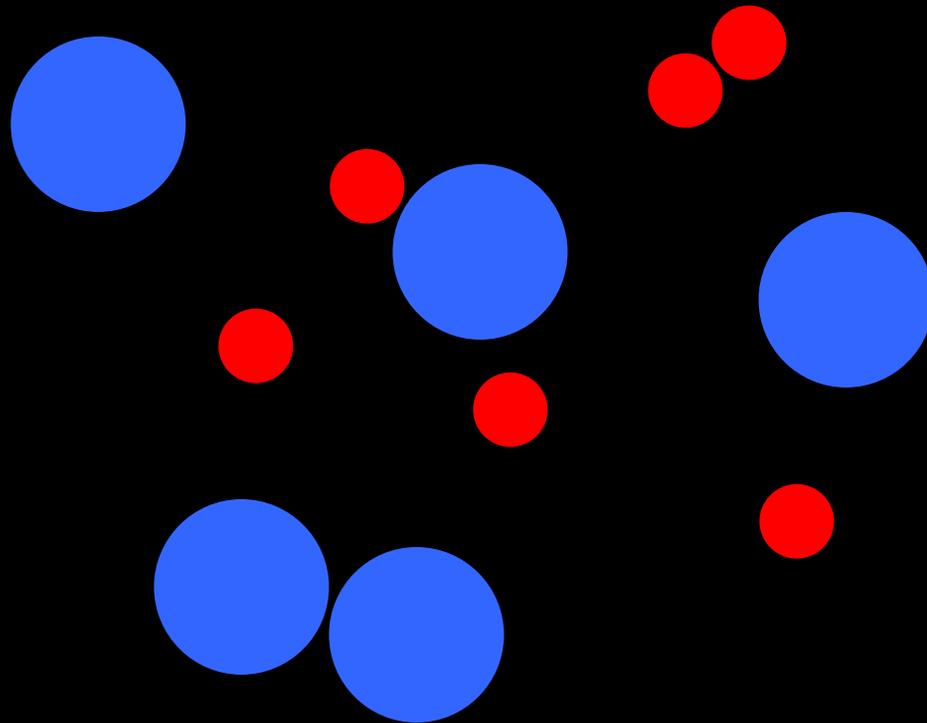
□ Dependiendo de los parámetros de control (coeficientes de restitución, cociente de tamaños y concentraciones), el cociente entre las velocidades cuadráticas medias  $\langle v_1^2 \rangle, \langle v_2^2 \rangle$  (y entre las temperaturas parciales  $T_1/T_2$ ) en una mezcla granular con enfriamiento libre presentan una rica diversidad de leyes de escala en el límite de masas dispares  $m_1/m_2 \ll 1$ . Los estados resultantes van desde el “sub-normal” ( $T_1/T_2 \ll 1$ ) al “super-ordenado” ( $\langle v_1^2 \rangle, \langle v_2^2 \rangle \ll 1$ ).

□ Si las colisiones cruzadas son **inelásticas** ( $a_{12} < 1$ ), el estado es siempre “ordenado” ( $\langle v_1^2 \rangle, \langle v_2^2 \rangle \ll 1$ ). Por consiguiente, en este caso no puede existir ni dinámica browniana (cuando  $x_1 \ll 0$ ) ni gas de Lorentz (cuando  $x_2 \ll 0$ ).

# Conclusions

- ❑ Un estado “normal” ( $T_1/T_2 \sim 1$ ) solamente es posible si los tres tipos de colisión son suficientemente cuasi-elásticas.
- ❑ Un estado “super-ordenado” sólo es posible en el límite browniano (cuando  $x_1 \rightarrow 0$ ). No hay estado “sub-normal” en ese caso.
- ❑ En el límite browniano existen líneas críticas en el diagrama de fases sobre las cuales el estado puede ser normal, ordenado o sub-ordenado.
- ❑ El mismo escenario que en el caso de enfriamiento libre se da esencialmente en el caso de un sistema forzado externamente.

# ¡GRACIAS!



Ciclo de seminarios del  
Dpto. de Física  
13 de noviembre, 2003