PROBLEMAS

1 Un oscilador armónico unidimensional, de masa m y carga e, se halla en un campo eléctrico homogeneo, no estático, de expresión $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp\left[-(t/\tau)^2\right]$. Calcular $P_{\text{Born}}((|0\rangle, -\infty) \to (|n\rangle, -\infty))$.

2 Un neutrón a velocidad v choca con el protón del átomo de hidrógeno, dotándole de una velocidad final v_p. Calcular la probabilidad P de que tras el impacto siga el átomo en su estado fundamental, suponiendo que $v \gg 1$ (en unidades atómicas).

3 Analizar, usando hasta cuarto orden en teoría de perturbaciones, el movimiento de un spin 1/2 en un campo magnético giratorio. Tomar $H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z$, $V(t) = \frac{1}{2}\omega_1\left[\sigma_x \cos\omega t + \sigma_y \sin\omega t\right]$. Calcular de este modo $P(\uparrow, 0 \to \downarrow, t)$.

4 Dado el Hamiltoniano $H = H_1 + H_2 + V_{12}$ con

$$
\begin{aligned}
H_1 &= -\frac{1}{2m}\partial^2_{x_1} + \frac{1}{2}mx_1^2 \\
H_2 &= -\frac{1}{2M}\partial^2_{x_2} + \frac{1}{2}Mx_2^2 \\
V_{12} &= \frac{1}{2}(M+m)(x_1 - x_2)^2
\end{aligned}
$$

que representa dos osciladores armónicos acoplados armónicamente entre si, calcúlese por el método de Born-Oppenheimer la energía del estado fundamental del sistema y compárese con las solución exacta ($\hbar = \omega = 1$).

5 Comparar las intensidades de emision de las dos primeras líneas de la serie de Lyman en hidrógeno atómico.

6 Una partícula de masa m y carga e se halla sometida a un potencial armónico tridimensional

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

Para $t < 0$ el sistema se encuentra en su estado fundamental, y para $t \geq 0$ se aplica un campo eléctrico oscilante, en la dirección del eje z, dado por

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0 \cos(\Omega t).$$

- Suponiendo que $|\omega - \Omega| \ll \omega$, en la aproximación de Born resonante, la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado excitado al cabo de un tiempo t. ¿En qué intervalo temporal es válido el resultado obtenido?
- Considerando la teoría de perturbaciones hasta segundo orden, determinar para qué estados excitados existe una probabilidad de transición desde el fundamental no nula.

- Calcular en la aproximación de Born (no necesariamente resonante) y despreciando términos cuadráticos en la intensidad del campo eleéctrico perturbado, como varía el valor esperado de la posición bajo el efecto de dicho campo.

7 En la desintegración β de H^3 (dos neutrones mas un protón en el núcleo) $\rightarrow (He^3)^+$ (dos protones mas un neutrón en el núcleo) el electrón emitido tiene energía cinética de 16 kev. Asumiendo que la aproximación súbita es aplicable para describir la respuesta de un electrón que supondremos inicialmente en el estado $1s$ de H^3, calcular la probabilidad de que este electrón esté en el estado fundamental de $(He^3)^+$.

8 La dinámica de una partícula de spin 1/2 está gobernada por el Hamiltoniano $H(t) = \Omega S_z + B(t) S_x$, donde $\mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ es el operador de spin, Ω es una constante positiva, y $B(t)$ es la siguiente función del tiempo:

$$B(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,, \\ \sqrt{3}\Omega t/T & \text{si } 0 \leq t \leq T\,, \\ \sqrt{3}\Omega & \text{si } t \geq T\,. \end{cases}$$

Se pide:

- Tomando $H_0 = \Omega S_z$ como Hamiltoniano estacionario y $V(t) = B(t) S_x$ como perturbación dependiente del tiempo, calcular la probabilidad de transición desde el estado inicial $|i\rangle \equiv |s_z = -\frac{1}{2}\hbar\rangle$ en $t = 0$, a un estado final $|f\rangle \equiv |s_z = \frac{1}{2}\hbar\rangle$ para $t = t_1 < T$ en la aproximación de Born. ¿Qué condición deben de satisfacer las constantes t_1 y T para que sea fiable la aproximación de Born?

- Suponiendo que T es lo suficientemente grande para poder aplicar la aproximación adiabática al Hamiltoniano total $H(t)$. ¿Cuál es la probabilidad para la transición desde un estado inicial $|i\rangle \equiv |s_z = -\frac{1}{2}\hbar\rangle$ en $t = 0$, a un estado final $|f\rangle \equiv |s_z = \frac{1}{2}\hbar\rangle$ en $t = T$, en esta aproximación ?

- ¿Cuál es el estado fundamental del sistema para $t > T$? Suponiendo que T es lo suficientemente pequeño como para poder aplicar la aproximación súbita. ¿ Cuál es la probabilidad de transición desde el estado fundamental para $t < 0$ al estado fundamental para $t > T$?

9 Calcúlese en la aproximación de Born $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ y σ para el potencial $V(r) = V_0 \exp(-\alpha r)$. Discútase la validez de la aproximación.

10 Calcúlese en la aproximación de Born $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ y σ para el potencial $V(r) = V_0 \delta(R - r)$, $R > 0$. Discutir la validez de la aproximación.

11 Un haz de partículas de spin $s = 1/2$, masa m y momento $\mathbf{p} = \hbar k \mathbf{u}_z$ es dispersado por un potencial de la forma

$$V(r) = A\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{r}\right)\mathbf{S}\cdot\mathbf{r},$$

donde A es una constante y $\mathbf{S} \equiv \hbar\sigma/2$ es el operador de spin. Se pide calcular en la aproximación de Born, en función de k y el ángulo de dispersión θ

1. La sección diferencial de "spin non-flip", $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega\,(\mathbf{p}\uparrow\to\mathbf{p}'\uparrow)$, para un estado inicial del haz totalmente polarizado en la dirección del eje z positivo, y para partículas finales con la misma polarización.

2. La sección diferencial de "spin flip", $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega\,(\mathbf{p}\uparrow\to\mathbf{p}'\downarrow)$, para un estado inicial del haz totalmente polarizado en la dirección del eje z positivo, y para partículas finales con polarización opuesta.

3. La sección eficaz diferencial $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega\,(\mathbf{p},\rho\to\mathbf{p}')$ para un estado inicial del haz dado por la matriz densidad de spin

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

y para partículas finales cuya polarización no se detecta.

12 Dos partículas de spin $1/2$ interaccionan a través de un potencial de la forma

$$V(x) = \begin{cases} A\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2/r & \text{si } r\le a \\ 0 & \text{si } r\ge a. \end{cases}$$

Se pide calcular en aproximación de Born y en el sistema centro de masas

1. La sección eficaz diferencial $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega\,(\mathbf{p},\chi_{\mathrm{T}}\to\mathbf{p}',\chi_{\mathrm{T}})$ para el caso de dos partículas distinguibles de masas m_1 y m_2, que colisionan en un estado triplete χ_{T} (con spin total $s = 1$).

2. La sección eficaz diferencial para el caso de dos partículas distinguibles de masas m_1 y m_2, cuyos haces iniciales están totalmente despolarizados y cuyas polarizaciones finales no se detectan.

3. La sección eficaz diferencial $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega\,(\mathbf{p},\chi_{\mathrm{T}}\to\mathbf{p}',\chi_{\mathrm{T}})$ para el caso de dos partículas idénticas de masa M que colisionan en un estado triplete χ_{T} (con spin total $s = 1$), y para un ángulo de dispersión $\theta = \pi/4$.

4. La sección eficaz diferencial $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega\,(\mathbf{p},\chi_{\mathrm{S}}\to\mathbf{p}',\chi_{\mathrm{S}})$ para el caso de dos partículas idénticas de masa M que colisionan en un estado singlete χ_{S} (con spin total $s = 0$), y para un ángulo de dispersión $\theta = \pi/4$.

13 La colisión a baja energía entre partículas de spin $S_1 = 1$ y $S_2 = 1/2$ puede describirse mediante un potencial efectivo de la forma

$$V(r) = \left(\frac{a}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{r}\right) \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2,$$

donde a y μ son constantes y r es la distancia relativa entre partículas.

1. Calcular la razón entre las secciones de difusión con spin total $S = 3/2$ y $S = 1/2$.
2. Calcular en la aproximación de Born la sección eficaz total de difusión para el estado de spin total con S_z máximo.

14 Sabiendo que para electrones de 10 keV, $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega|_{\theta=0} = 1$ mbarn/sr y $\sigma = 15$ mbarb, calcular la amplitud de difusión hacia delante (prescindir del spin).
¿ Puede ser isótropa ésta sección eficaz diferencial?

15 Si en la difusión de un potencial central, para $p = 1$ MeV/c, solo una onda parcial es importante, y además ésta es resonante, calcular de que onda se trata si $\sigma_{\mathrm{el}} = 1.47 \cdot 10^4$ barn.

16 Supóngase la difusión

$$\pi^0 + \pi^0 \to \pi^0 + \pi^0$$

en el centro de masas y a baja energía, de modo que las ondas s y p sean importantes, y

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{k^2}\left[A + B\cos\theta + C\cos^2\theta\right].$$

¿ Que se puede afirmar de los coeficientes B y C?

17 La difusión $p-n$ a muy baja energía tiene lugar dominantemente en onda $L = 0$, y según el spin total del sistema se encuentra experimentalmente que las secciones eficaces en el estado triplete y singlete son $\sigma_{\mathrm{t}} = 3.64$ barn y $\sigma_{\mathrm{s}} = 70.7$ barn. Determínese la sección eficaz $p - n$ a muy bajas energías, cuando el protón tiene un estado de spin $|S_{\mathrm{p}}\rangle = \exp(-i\alpha)|\uparrow\rangle + \exp(i\alpha)|\downarrow\rangle$ mientras que el neutrón tiene $|S_{\mathrm{n}}\rangle = |\uparrow\rangle$.

18 Consideremos un experimento de colisión elástica,

$$a + B \to a + B$$

donde a y B son particulas sin spin. Sea σ_{tot} la sección eficaz total. De esta magnitud se conocen los siguientes datos:

1. A σ_{tot} contribuye una resonancia que es observable en todos los ángulos, expecto a $\theta = \pi/2$ para el cual la contribución de la resonancia se anula.

2. Además de la onda resonante también contribuye la onda S y ninguna más.

3. El momento $p_{\rm R} \equiv \hbar k_{\rm R}$ para el cual se produce la resonancia y el valor $\sigma_{\rm tot}^{\rm R}$ de $\sigma_{\rm tot}$ para la resonancia son: $k_{\rm R} = 2 \cdot 10^{14} {\rm cm}^{-1}$ y $\sigma_{\rm tot}^{\rm R} = 1.1 \cdot 10^{-27} {\rm cm}^2$.

Se pide:

1. ¿Cuál es el momento angular L de la onda parcial resonante?

2. Calcula el valor del defasaje δ_0 en onda S.

3. Calcular el valor de la sección eficaz diferencial ${\rm d}\sigma/{\rm d}\Omega$ en la resonancia para un ángulo de dispersión de $\theta = \pi$.

19 Considérese la difusión elástica de una partícula de masa m y momento p por un potencial central esféricamente simétrico de la forma

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } r \leq a \\ 0 & \text{si } r \geq a. \end{cases}$$

donde V_0 y a son constantes positivas.

- Calcular el defasaje δ_0 correspondiente a la onda s en función de los parámetros V_0 y a.

- Calcular la sección eficaz total a muy baja energía.

20 Considérese la colisión elástica de una partícula de masa m, spin cero y momento $p = \hbar k$ con el potencial esféricamente simétrico

$$V(r) = \frac{\lambda \hbar^2}{2ma} \delta(r - a).$$

Se pide :

i) Calcular la sección eficaz diferencial en aproximación de Born y la sección eficaz total (dentro de la misma aproximación) para el caso $ka \ll 1$.

ii) Calcular la sección eficaz total de manera exacta en el límite de baja energía.

iii) Conteste a las siguientes preguntas: a) ¿ Bajo que condiciones es aproximadamente válida la expresión para la sección eficaz total hallada en i)? b) Suponiendo a y k fijos ¿Para qué valor de la constante de acoplo λ se tiene una onda parcial s resonante? c) ¿Para qué valor o valores del momento el potencial es transparente para partículas con momento angular $l = 0$?