PROBLEMAS

1 Comprobar que las siguientes ecuaciones de evolución relativistas describen correctamente el spin (s) de partículas con masa.

a) Klein-Gordon ($s = 0$),

b) Dirac ($s = 1/2$),

c) Proca ($s = 1$),

d) Proca generalizada (spin entero s),

e) Bargmann-Wigner ($s = 3/2$),

f) Rarita-Schwinger ($s = 3/2$).

2 Resolver el problema anterior en el caso de partículas de masa nula.

3 Encontrar soluciones de tipo solitón para la ecuación Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + 6u_x u + u_{xxx} = 0,$$

suponiendo $u(x,t) = f(x - Vt)$.

4 Encontrar soluciones de tipo kink para la ecuación sine-Gordon

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u,$$

suponiendo $u(x,t) = f(x - Vt)$.

5 Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange encontrar las ecuaciones de evolución para las siguientes densidades lagrangianas ($\mathcal{L}$) ($\hbar = c = 1$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2m}(\nabla\psi^*)(\nabla\psi) - \frac{1}{2i}\left(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*\right) - \psi^* V\psi, \\
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \;\; F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m}\left[\left((i\partial_\mu - eA_\mu)\phi\right)\left((-i\partial^\mu - eA^\mu)\phi^*\right) - m^2\phi^*\phi\right], \\
\mathcal{L} &= \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi, \;\; \overline{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma_0, \\
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}\left(i\gamma_\mu\left[\partial^\mu + ieA^\mu\right] - m\right)\psi.
\end{aligned}$$

6 Deducir las ecuaciones de evolución y las cantidades conservadas de los siguientes lagrangianos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2} f(\phi)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - g(\phi), \\
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}a_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi + c_\mu\partial^\mu f(\phi) - g(\phi)\,,\ a_{\mu\nu}, c_\mu \in \mathbf{R}, \\
\mathcal{L} &= a\chi^p + h(\phi)\chi^q - g(\phi)\,,\ \chi \equiv \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi,\ p > q \geq 1, a \in \mathbf{R}\,, \\
\mathcal{L} &= \frac{a}{2}\left(\Box\phi\right)^2 - h(\phi)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + k(\phi)\,, \\
\mathcal{L} &= a j_\mu j^\mu + b\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - G(|\phi|)\,,\ \ a \in \mathbf{R},\ b > 0,\ j_\mu \equiv \frac{i}{2}\left(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*\right)\,.
\end{aligned}
$$

7 Estudiar la invariancia conforme del siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi.$$

¿ Qué ocurre en dos dimensiones?

8 Sea d el operador derivada exterior. Demostrar

a) $\mathrm{d}^2 = 0$,

b) $\mathrm{d}(\phi \wedge \psi) = \mathrm{d}\phi \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge \mathrm{d}\psi$, donde $\phi \in \Lambda^p \mathcal{U}$.

9 Sea $\eta_{\mu\nu\rho\sigma}$ el tensor completamente antisimétrico en 4 dimensiones con una métrica $(+,-,-,-)$. Demostrar

$$
\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu\rho\sigma}\eta^{\mu\nu\rho\sigma} &= -4!, \\
\eta_{\mu\nu\rho\sigma}\eta^{\alpha\nu\rho\sigma} &= -3!\ g^\alpha_\mu, \\
\eta_{\mu\nu\rho\sigma}\eta^{\alpha\beta\rho\sigma} &= -2!\ \left(g^\alpha_\mu g^\beta_\nu - g^\alpha_\nu g^\beta_\mu\right)\,, \\
\eta_{\mu\nu\rho\sigma}\eta^{\alpha\beta\gamma\sigma} &= -1!\ \left(g^\alpha_\mu g^\beta_\nu g^\gamma_\rho - g^\alpha_\mu g^\beta_\rho g^\gamma_\nu + g^\alpha_\rho g^\beta_\mu g^\gamma_\nu - g^\alpha_\rho g^\beta_\nu g^\gamma_\mu + g^\alpha_\nu g^\beta_\rho g^\gamma_\mu - g^\alpha_\nu g^\beta_\mu g^\gamma_\rho\right)\,.
\end{aligned}
$$

10 Sea el teorema de Stokes:

$$\int_{\mathcal{K}} \mathrm{d}\phi = \int_{\partial\mathcal{K}} \phi\ ,$$

donde $\mathcal{K}$ es una variedad orientada p-dimensional y $\phi \in \Lambda^{p-1}\mathbf{R}^n$. Estudiar los siguientes casos:

a) $p = n = 2\ ,\ \mathcal{K} \subset \mathbf{R}^2$,

b) $p = n = 3,\ \mathcal{K} \subset \mathbf{R}^3$,

c) $p=2$, $n=3$, $\mathcal{K}$ superficie orientada en $\mathbf{R}^3$.

11 Sea la aplicación $* : \Lambda^p\mathcal{U} \to \Lambda^{n-p}\mathcal{U}$ definida por

$$*\phi \equiv \frac{1}{p!(n-p)!}\eta_{i_1\cdots i_n}\phi_{j_1\cdots j_p}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_pj_p}\beta^{i_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\beta^{i_n} \ ,$$

$\phi = \frac{1}{p!}\phi_{i_1\cdots i_p}\beta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\beta^{i_p}$, $g = \det\, g_{ij}$, y $\eta_{i_1\cdots i_n} = \sqrt{|\det\, g_{ij}|}\,[i_1\cdots i_n]$ es el tensor completamente antisimétrico, donde $[i_1\cdots i_n]$ es el símbolo completamente antisimétrico. Calcular $*^2$.

12 Sea la aplicación $\delta : \Lambda^p\mathcal{U} \to \Lambda^{p-1}\mathcal{U}$ definida por $\delta\phi \equiv (-1)^{np+n+s} * \mathrm{d} * \phi$, donde $(-1)^s = \mathrm{sgn}\,(\det\, g_{ij})$. Demostrar:

a) $\delta^2 = 0$,

b) Sea $\phi = \phi_i \mathrm{d}x^i$ entonces

$$\delta\phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_k\left(\sqrt{|g|}\phi_j g^{kj}\right) \ ,$$

c) Sean $\phi \in \Lambda^{p-1}\mathcal{U}$ y $\psi \in \Lambda^p\mathcal{U}$ entonces

$$\int \mathrm{d}\phi \wedge *\psi = -\int \phi\wedge *\delta\phi \ .$$

13 Sean ϕ, $\psi \in \Lambda^p\mathcal{U}$, demostrar que

$$\int \phi\wedge *\psi = \int \psi \wedge *\phi \ .$$

14 Sea el siguiente operador diferencial de segundo orden, $\Delta \equiv (\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}) : \Lambda^p\mathcal{U} \to \Lambda^p\mathcal{U}$. Si f es una 0-forma, demostrar

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_k\left(\sqrt{|g|}g^{ki}\,(\partial_i f)\right).$$

15 Demostrar que

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\ f &\equiv J^{-1}\mathrm{d}f = (\partial_j f)\,g^{ji}\partial_i \ ,\\
\mathrm{div}\ v &\equiv \delta J v = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_k\left(\sqrt{|g|}v^k\right) \ ,\\
\mathrm{rot}\ v &\equiv J^{-1} * \mathrm{d}Jv = \partial_j\left(v^l g_{li}\right)\eta^{jik}\partial_k \ .
\end{aligned}$$

donde la definición del rotacional solo se aplica en $\mathbf{R}^3$. La aplicacion J lleva campos vectoriales a 1-formas usando la isometría canónica.

16 Estudiar como se transforman bajo una transformación de Lorentz los campos eléctricos y magnéticos.

17 ¿ Cómo se transforman $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ y $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ bajo una transformación de Lorentz?

18 Deducir variacionalmente la ecuación de Lorentz.

19 Estudiar la fuerza desde el punto de vista relativista.

20 Estudiar el movimiento de una partícula cargada en el seno de campos magnéticos y eléctricos, estáticos y uniformes.

21 Estudiar la deriva de una partícula cargada en campos magnéticos estáticos no uniformes.

22 Calculando las correcciones relativistas al orden mas bajo para el lagrangiano de dos partículas cargadas en interacción, deducir el término de Darwin.

23 Calcular los campos producidos por un cuadrupolo eléctrico y por un dipolo magnético.

24 Deducir los potenciales de Lienard-Wiechert asumiendo que solo se conoce el potencial de Coulomb y la relatividad especial.

25 Si los niveles de energía de un átomo no estuvieran cuantizados, el electrón caería al nucleo debido a la pérdida de energía por radiación. Estimar clásicamente el tiempo que tardaría un electrón en caer sobre el protón suponiendo que inicialmente se encuentra en una órbita circular de radio $R = 0.529$Å. ¿ Cuántas vuelta dará el electrón antes de caer? Para simplificar los cálculos supóngase que en cada instante la órbita es circular (la trayectoria real sería una espiral). Efectuar los cálculos tanto en la aproximación no relativista como en la relativista.

26 Escribir la ecuación de Lorentz-Dirac en términos de magnitudes tridimensionales.

27 Estudiar el movimiento de una partícula cargada en presencia del campo producido por un monopolo.

28 La función de Green del potencial vector satisface la ecuación

$$-k^2 G(k) = 1.$$

El propagador retardado se define realizando la integral en k^0 por un camino de integración que pasa por encima de los dos polos. El propagador avanzado se calcula usando un contorno que pasa por debajo de los dos polos. Se puede definir un tercer propagador (de Feynman) postulando un camino de integración que pasa por debajo del primer polo y por encima del segundo. Calcular este último propagador.

29 Estudiar las singularidades en el cono de luz (i.e. $x^2 \to 0$) del propagador de Feynman en el caso masivo.

30 Dirac introdujo la corriente magnética $k^\mu = (\sigma, \mathbf{k})$ y modificó las ecuaciones de Maxwell a

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu, \;\; \partial_\nu [*F^{\mu\nu}] = -k^\mu$$

donde j^μ es la cuadricorriente standard. $*F$ es el dual del tensor F.

- Demostrar que las nuevas ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo la siguiente transformación (llamada transformación de dualidad):

$$F \to *F, \;\; *F \to F;$$

$$j \to k, \;\; k \to -j.$$

- Asumiendo una fuente eléctrica y magnética puntual de carga eléctrica q y carga magnética g (las particulas con cargas eléctricas y magnéticas se denominan diones), demostrar que la fuerza de Lorentz se generaliza a

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = (qF^{\mu\nu} + g[*F^{\mu\nu}])u_\nu$$

donde u^μ es la cuadrivelocidad de la partícula.

31 Generalizando la derivación semiclásica de la cuantización de la carga (Dirac) a un sistema compuesto por dos diones de cargas (q_1, g_1) y (q_2, g_2), obtener la siguiente condición de cuantización

$$\frac{q_1 g_2 - q_2 g_1}{4\pi\hbar} = \frac{1}{2} n_{12},$$

donde n_{12} es un número entero.

32 El modelo Georgi-Glashow es una teoría Yang-Mills-Higgs que contiene un multiplete Higgs que se transforma con la representación adjunta del grupo SO(3) y campos gauge $W_\mu = W_{a\mu}T^a$, donde T^a son los generadores hermíticos del grupo SO(3) que satisfacen $[T_a, T_b] = if^{abc}T_c$, donde $f^{abc} = [abc] \equiv \epsilon^{abc}$. En la representación adjunta tenemos $(T^a)_{bc} = -if^a_{bc}$. El lagrangiano del modelo es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{a\mu\nu}G^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}D^\mu\phi^a D_\mu\phi_a - V(\phi),$$

donde

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ie[W_\mu, W_\nu],$$

$$D^\mu\phi^a = \partial_\mu\phi^a - e\epsilon^{abc}W_{b\mu}\phi_c,$$

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - r^2)^2.$$

- Escribir las ecuaciones del movimiento.
- Encontrar la ecuación que verifica el dual del tensor $G^{\mu\nu}_a$.
- Usando la notación $G^{0i}_a \equiv \mathcal{E}^i_a$ y $G^{ij}_a = -\epsilon^{ij}_k\mathcal{B}^k_a$, escribir la densidad de energía del modelo (T_{00}). Demostrar que $T_{00} \geq 0$ y encontrar bajo que condiciones se anula.