Física Estadística 09/10

Hoja 1

Mónica Capilla Alba

Jesús M. Gómez Romero

2.- Considérese un dado con las seis caras numeradas del 1 al 6. Después de un gran número de tiradas, la media de los números que van saliendo es 4.6, en vez del valor esperado para un dado sin trucar, 3.5. Si no tenemos ninguna otra información, ¿cuál es la probabilidad de cada una de las caras?

Sea la media:

$$< j > = \sum_{j=1}^{6} j \cdot p_j$$

Sabemos que la suma de todas las probabilidades ha de ser igual a 1, por la condición de normalización:

$$1 = \sum_{j=1}^{6} p_j$$

Que dan lugar a las ecuaciones de ligadura:

$$\sum_{j=1}^{6} j \cdot p_j - < j > = 0 \qquad \rightarrow \qquad g_1$$

$$\sum_{j=1}^{6} p_j - 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad g_2$$

Sabemos que la entropía:

$$S = -\sum_{j=1}^{6} p_j \, log p_j$$

Conociendo la expresión de la entropía y las ecuaciones de ligadura g_1, g_2 utilizamos la Lagrangiana:

$$L = -\sum_{j=1}^{6} p_j \, log p_j + \lambda_1 \left(\sum_{j=1}^{6} j \cdot p_j - < j > \right) + \lambda_2 \left(\sum_{j=1}^{6} p_j - 1 \right)$$

donde λ_1, λ_2 son los multiplicadores de Lagrange.

Aplicamos la condición de máximo para la Lagrangiana:

$$\frac{\partial L}{\partial p_j} = -(\log p_j + 1) + j\,\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

Despejamos p_j:

$$p_j = e^{j\,\lambda_1 + \lambda_2 - 1}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$p_1 = e^{\lambda_1}\, e^{\lambda_2 - 1}$$

$$p_2 = e^{2\,\lambda_1}\, e^{\lambda_2 - 1}$$

$$p_3 = e^{3\,\lambda_1}\, e^{\lambda_2 - 1}$$

$$p_4 = e^{4\,\lambda_1}\, e^{\lambda_2 - 1}$$

$$p_5 = e^{5\,\lambda_1}\, e^{\lambda_2 - 1}$$

$$p_6 = e^{6\,\lambda_1}\, e^{\lambda_2 - 1}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$$p_1 + 2\,p_2 + 3\,p_3 + 4\,p_4 + 5\,p_5 + 6\,p_6 = < j >$$

Sustituyendo las p_j en las dos últimas ecuaciones obtenemos:

$$e^{\lambda_2 - 1}\left(e^{\lambda_1} + e^{2\,\lambda_1} + e^{3\,\lambda_1} + e^{4\,\lambda_1} + e^{5\,\lambda_1} + e^{6\,\lambda_1}\right) = 1$$

$$e^{\lambda_2 - 1}\left(e^{\lambda_1} + 2e^{2\,\lambda_1} + 3e^{3\,\lambda_1} + 4e^{4\,\lambda_1} + 5e^{5\,\lambda_1} + 6e^{6\,\lambda_1}\right) = < j >$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{e^{\lambda_2 - 1}\left(e^{\lambda_1} + 2e^{2\,\lambda_1} + 3e^{3\,\lambda_1} + 4e^{4\,\lambda_1} + 5e^{5\,\lambda_1} + 6e^{6\,\lambda_1}\right)}{e^{\lambda_2 - 1}(e^{\lambda_1} + e^{2\,\lambda_1} + e^{3\,\lambda_1} + e^{4\,\lambda_1} + e^{5\,\lambda_1} + e^{6\,\lambda_1})} = \frac{< j >}{1}$$

$$\frac{\left(e^{\lambda_1} + 2e^{2\,\lambda_1} + 3e^{3\,\lambda_1} + 4e^{4\,\lambda_1} + 5e^{5\,\lambda_1} + 6e^{6\,\lambda_1}\right)}{(e^{\lambda_1} + e^{2\,\lambda_1} + e^{3\,\lambda_1} + e^{4\,\lambda_1} + e^{5\,\lambda_1} + e^{6\,\lambda_1})} = < j >$$

Siendo esta la ecuación general.

Particularizamos para el **DADO NO TRUCADO**:

$$< j > = 3.5$$

$$\frac{\left(e^{\lambda_1} + 2e^{2\lambda_1} + 3e^{3\lambda_1} + 4e^{4\lambda_1} + 5e^{5\lambda_1} + 6e^{6\lambda_1}\right)}{\left(e^{\lambda_1} + e^{2\lambda_1} + e^{3\lambda_1} + e^{4\lambda_1} + e^{5\lambda_1} + e^{6\lambda_1}\right)} = 3.5$$

Operando:

$$\left(e^{\lambda_1} + 2e^{2\lambda_1} + 3e^{3\lambda_1} + 4e^{4\lambda_1} + 5e^{5\lambda_1} + 6e^{6\lambda_1}\right) = 3.5\left(e^{\lambda_1} + e^{2\lambda_1} + e^{3\lambda_1} + e^{4\lambda_1} + e^{5\lambda_1} + e^{6\lambda_1}\right)$$

Llegamos a la siguiente expresión:

$$2.5\,(e^{\lambda_1})^6 + 1.5(e^{\lambda_1})^5 + 0.5\,(e^{\lambda_1})^4 - 0.5\,(e^{\lambda_1})^3 - 1.5\,(e^{\lambda_1})^2 - 2.5\left(e^{\lambda_1}\right) = 0$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$x = e^{\lambda_1}$$

Vemos que tenemos una ecuación de grado 6:

$$2.5\,x^6 + 1.5x^5 + 0.5\,x^4 - 0.5\,x^3 - 1.5\,x^2 - 2.5\,x = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -0.858258 - 0.513219i$$

$$x_3 = -0.858258 + 0.513219i$$

$$x_4 = 0.0582576 - 0.998302i$$

$$x_5 = 0.0582576 + 0.998302i$$

$$x_6 = 1$$

Podemos ver que solo el valor real $x = x_6 = 1$ es válido. Entonces de la ecuación de ligadura g_2, deducimos que:

$$6\,e^{\lambda_2 - 1} = 1 \quad \leftrightarrow \quad e^{\lambda_2 - 1} = \frac{1}{6}$$

De modo que:

$$p_j = x^j\,e^{\lambda_2 - 1}$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6} \approx 16.7\%$$

Con esto hemos comprobado que para un dado no trucado todas las caras tienen la misma probabilidad.

Particularizamos para el DADO TRUCADO:

$$< j > = 4.6$$

$$\frac{\left(e^{\lambda_1} + 2e^{2\lambda_1} + 3e^{3\lambda_1} + 4e^{4\lambda_1} + 5e^{5\lambda_1} + 6e^{6\lambda_1}\right)}{\left(e^{\lambda_1} + e^{2\lambda_1} + e^{3\lambda_1} + e^{4\lambda_1} + e^{5\lambda_1} + e^{6\lambda_1}\right)} = 4.6$$

Operando:

$$\left(e^{\lambda_1} + 2e^{2\lambda_1} + 3e^{3\lambda_1} + 4e^{4\lambda_1} + 5e^{5\lambda_1} + 6e^{6\lambda_1}\right) = 4.6\left(e^{\lambda_1} + e^{2\lambda_1} + e^{3\lambda_1} + e^{4\lambda_1} + e^{5\lambda_1} + e^{6\lambda_1}\right)$$

Llegamos a la siguiente expresión:

$$1.4\,(e^{\lambda_1})^6 + 0.4(e^{\lambda_1})^5 - 0.6\,(e^{\lambda_1})^4 - 1.6\,(e^{\lambda_1})^3 - 2.6\,(e^{\lambda_1})^2 - 3.6\left(e^{\lambda_1}\right) = 0$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$x = e^{\lambda_1}$$

Vemos que tenemos una ecuación de grado 6:

$$1.4\,x^6 + 0.4x^5 - 0.6\,x^4 - 1.6\,x^3 - 2.6\,x^2 - 3.6\,x = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -0.956052 - 0.606895i$$

$$x_3 = -0.956052 + 0.606895i$$

$$x_4 = 0.0665862 - 1.15692i$$

$$x_5 = 0.0665862 + 1.15692i$$

$$x_6 = 1.49322$$

Podemos ver que solo el valor real $x = x_6 = 1.49322$ es válido. Entonces de la ecuación de ligadura g_2, deducimos que:

$$6\,e^{\lambda_2 - 1} = 1$$

$$e^{\lambda_2 - 1} = \frac{1}{6}$$

De modo que:

$$p_j = x^j\,e^{\lambda_2 - 1}$$

Particularizando para cada cara:

$$p_1 = 0.0490 \approx 4.9\%$$

$$p_2 = 0.0730 \approx 7.3\%$$

$$p_3 = 0.1090 \approx 10.9\%$$

$$p_4 = 0.1629 \approx 16.3\%$$

$$p_5 = 0.2431 \approx 24.3\%$$

$$p_6 = 0.3630 \approx 36.3\%$$

Puede comprobarse que se cumplen ambas condiciones de ligadura.