Problema nº 3

Sobre la no unicidad del factor integrante. Considérese la siguiente forma diferencial:

$$yxdx + x^2dy = 0$$

¿Es exacta? ¿Es cerrada? Si no es una diferencial exacta, ¿podrías calcular el factor integrante? ¿Está determinado unívocamente? ¿Podrías calcular explícitamente varios factores integrantes?

Nuestra ecuación diferencial es de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Para que el primer miembro de esta ecuación sea diferencial total de una cierta función u(x,y) tal que

$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$

Debe suceder que $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$. Esta condición es equivalente a decir que la ecuación diferencial es exacta.

Para que la ED sea cerrada debe suceder que $\frac{\partial^2 N(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 M(x,y)}{\partial y^2}$.

En nuestro caso tenemos que $\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = -1$, por lo que la ecuación diferencial no es exacta. Además podemos ver que es cerrada, ya que las segundas derivadas coinciden y son iguales a cero.

Al no ser exacta podemos calcular el factor integrante. Lo haremos suponiendo que el factor integrante es una función g(x,y) que factoriza en la forma

$$g(x,y) = f(x) \cdot h(y)$$

$$g(x,y) \cdot yxdx + g(x,y) \cdot x^2dy = 0$$

$$f(x)h(y)yxdx + f(x)h(y)x^2dy = 0$$

Al multiplicar por el factor integrante habrá de verificarse la igualdad de las derivadas, como indicamos anteriormente.

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x) \cdot h(y)yx] = f(x) \cdot x \cdot h'(y) \cdot y + f(x) \cdot x \cdot h(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x)h(y)x^2] = 2x \cdot f(x)h(y) + x^2h(y)f'(x)$$

Dividimos por la ecuación original:

$$y\left(1 + \frac{h'(y)}{h(y)}\right) = 1 + x\frac{f'(x)}{f(x)} = c$$

Como cada miembro de la ecuación depende sólo de x ó de y, y ambas variables son independientes, cada miembro debe ser igual a una constante que denominamos c.

Resolvemos cada ED:

$$1 + x\frac{f'(x)}{f(x)} = c \Rightarrow f(x) = c \cdot e^{c-1}$$

$$y\left(1 + \frac{h'(y)}{h(y)}\right) = 1\text{=c}\Rightarrow h(y) = cy^{c}$$

El factor integrante nos queda:

$$\mathbf{g(x,y) = f(x)h(y) = cy^{c}x^{c-1}}$$

Puede verse que cambiando el valor de la constante c podemos obtener diferentes factores integrantes.