6.- Usando la colectividad gran canónica calcular $\Delta E/\langle E\rangle$ para un gas ideal bidimensional ultrarrelativista. Expresar el resultado como funcion de $\langle N\rangle$.

Calculamos inicialmente la función de partición:

$$Q=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}e^{-\alpha N}Z_N$$

donde: $\alpha=-\beta\mu$
$z=e^{-\alpha}$

y Z_N se define como:

$$Z_N=\frac{1}{h_0^{2N}}\int d^2r_1...d^2r_2d^2p_1...d^2p_Ne^{-\beta H}$$

Como trabajamos con partículas ultrarrelativistas:

$$H=\sqrt{p^2c^2+m^2c^2}\approx pc \qquad \text{porque} \qquad pc>>mc^2$$

y al tratarse de un gas ideal:

$$H=\sum p_ic$$

Tenemos que:

$$Z_N=\zeta^N \qquad \text{donde} \qquad \zeta=\frac{1}{h_0^2}\int d^2rd^2pe^{-\beta pc}$$

Sustituyendo:

$$Q=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}e^{-\alpha N}\zeta^N=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N}\left(e^{-\alpha}\zeta\right)^N$$

y haciendo un cambio de variable: $e^x=\sum_n\frac{1}{n!}x^n$ llegamos a

$$Q=\exp\left(e^{-\alpha}\zeta\right)$$

Calculamos ζ:

$$\zeta = \frac{S}{h_0^2} 2\pi \int_0^\infty dp\, p e^{-\beta pc} = \frac{S 2\pi}{h_0^2} \frac{1}{(\beta c)^2}$$

donde S es la superficie.
Como ya conocemos Q, podemos calcular:

$$\langle N \rangle = \frac{1}{Q} \sum \frac{1}{N!} e^{-\alpha N} N \zeta^N = \frac{1}{Q} \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha}\bigg|_\beta \right) Q = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \log Q)_\beta$$

El logaritmo de Q viene dado por:

$$\log Q = e^{-\alpha} \zeta$$

Calculamos ahora $\langle E \rangle$:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{Q} \sum \frac{1}{N!} e^{-\alpha N} \int d^2 r_1 d^2 p_1 H e^{-\beta H} = \frac{1}{Q} \left(-\frac{\partial}{\partial \beta}\bigg|_\alpha \right) Q = -\frac{\partial \log Q}{\partial \beta}\bigg|_\alpha$$

Por lo tanto:

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \log Q}{\partial \beta}\bigg|_\alpha = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(e^{-\alpha} \zeta \right)\Big|_\alpha = -e^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \zeta$$

Sustituyendo el valor de ζ:

$$\zeta = \frac{S 2\pi}{h_0^2} \frac{1}{(\beta c)^2}$$

tenemos que:

$$\langle E \rangle = e^{-\alpha} \frac{2\zeta}{\beta} = \frac{2}{\beta} \overbrace{e^{-\alpha} \zeta}^{\langle N \rangle} = \xrightarrow{\beta = 1/K_B T} = 2 K_B T \langle N \rangle$$

Calculamos ahora:

$$\Delta E^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{\partial^2 \log Q}{\partial \beta^2}\bigg|_\alpha = \frac{6}{\beta^2} \langle N \rangle = 6 \zeta e^{-\zeta} \frac{1}{\beta^2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\sqrt{(\Delta E)^2}}{\langle E \rangle} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6}{\langle N \rangle}} = \sqrt{\frac{3}{2 \langle N \rangle}}$$

Observamos que las fluctuaciones van a cero con el número de partículas.

Gemma María Fernández Cristóbal