Física estadística

Aplicaciones de la Colectividad Canónica al Gas Ideal

María F. Collado Caballero
Isabel Mª Martín Ríos

Hoja 2 - Problema 2º

Considérese el siguiente procedimiento para generar vacíos. Sea un bulbo esférico de 10 cm de radio que se mantiene durante todo el proceso a temperatura ambiente (300 K), excepto en un pequeño parche de su superficie, de 2 cm^2, que se mantiene a la temperatura del nitrógeno líquido (77 K). El bulbo contiene originalmente vapor de agua a la presión de 0.2 mm de Hg. Sabiendo que cada molécula de agua que choca con el citado parche frío se condensa y se adhiere a la superficie, estimar el tiempo que se necesita para que la presión descienda a 10^{-5} mm de Hg dentro del bulbo.

Ayuda. Masa atómica del Hidrogeno: 1. Masa atómica del Oxígeno: 16.

Se trata de ver la variación del número de partículas con el tiempo. Sabemos que el número de partículas que chocan contra el parche por unidad de tiempo, viene dado por la expresión:

$$\Phi_0 A = \frac{p}{\sqrt{2m\pi k_B T}} A \tag{1}$$

Donde A es el área del parche.

Relacionamos esta expresión con la variación del número de moléculas respecto del tiempo:

$$\frac{1}{4}\Phi_0 A = -\frac{dN}{dt} \tag{2}$$

Por otra parte, dentro del bulbo tenemos vapor de agua, que vamos a considerar gas ideal y por tanto vendrá regido por la ecuación de estado siguiente:

$$pV = Nk_B T$$

Si la diferenciamos respecto del tiempo:

$$\frac{dp}{dt}V = \frac{dN}{dt}k_B T$$

De donde podemos despejar:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{V}{k_B T}\frac{dp}{dt} \tag{3}$$

Sustituimos (1) y (3) en la expresión (2) y obtenemos:

$$\frac{1}{4}\frac{p}{\sqrt{2m\pi k_B T}}A=-\frac{V}{k_B T}\frac{dp}{dt}$$

Obtenemos así una ecuación diferencial que resolveremos mediante separación de variables:

$$\frac{1}{4}\frac{A\sqrt{k_B T}}{V\sqrt{2m\pi}}dt=-\frac{dp}{p}$$

Todo lo que acompaña al dt es constante, por tanto, para simplificar la expresión, lo llamaremos α :

$$\alpha=\frac{1}{4}\frac{A\sqrt{k_B T}}{V\sqrt{2m\pi}}$$

La ecuación anterior nos queda por tanto:

$$\alpha dt=-\frac{dp}{p}$$

Ahora no tenemos más que integrar, de lo que obtenemos:

$$-\ln\frac{p}{p_0}=\alpha t$$

Despejando t que es lo que nos interesa:

$$t=-\frac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{p}{p_0}\right) \quad \Rightarrow \quad t=-\frac{4V\sqrt{2m\pi}}{A\sqrt{k_B T}}\left(\ln\frac{p}{p_0}\right)$$

Donde:

$$p=10^{-5}\,\mathrm{mmHg}$$
$$p_0=0.2\,\mathrm{mmHg}$$
$$A=2\,\mathrm{cm}^2=0.0002\,\mathrm{m}^2$$
$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(0.1\mathrm{m})^3=0.0042\,\mathrm{m}^3$$
$$k_B=1.38\cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}=1.38\cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{K}}=1.38\cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{K}\cdot\mathrm{s}^2}$$
$$T=300\,\mathrm{K}$$
$$m=\frac{18}{N_A}\mathrm{g}=\frac{0.018}{N_A}\mathrm{kg}$$

Sustituyendo todos los datos, obtenemos como resultado:

$$\boxed{t=5.6\,\mathrm{s}}$$