Mónica Capilla Alba
Jesús M. Gómez Romero
Hoja 2
Física Estadística
09/10

EJERCICIO 3

Calcular la macrofunción de partición Q(α,β) de un gas de N partículas no relativistas bidimensionales confinadas en una superficie S.

a) Obtener la relación entre <N> y α, S y β.
b) Calcular la energía media y la presión como función de <N>, S y α.

Sea la macrofunción de partición:

$$Q(\alpha,\beta) = \sum_N z^N \, Z_N$$

Donde z representa la fugacidad.

$$z = e^{-\alpha}$$

Sabiendo que Z es:

$$Z = \frac{1}{h_0^f N!}\int dq\, dp\, e^{-\beta H_N}$$

Por lo que la macrofunción nos queda:

$$Q(\alpha,\beta) = \sum_N e^{-\alpha N}\, \frac{1}{h_0^f N!}\int dq\, dp\, e^{-\beta H_N}$$

Particularizamos para nuestro sistema de N partículas ultrarrelativistas bidimensionales:

$$Q(\alpha,\beta) = \sum_N e^{-\alpha N}\, \frac{1}{h_0^{2N} N!}\int d^2r_1 \dots d^2r_N\, d^2p_1 \dots d^2p_N\, e^{-\beta \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m}}$$

Integrando las componentes de d^2r_i, obtenemos la superficie:

$$Q(\alpha,\beta) = \sum_N e^{-\alpha N}\, \frac{S^N}{h_0^{2N} N!}\int d^2p_1 \dots d^2p_N\; e^{-\beta \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m}}$$

Separamos las integrales sobre d^2p_i:

$$Q(\alpha,\beta) = \sum_N e^{-\alpha N}\, \frac{S^N}{h_0^{2N} N!}\left[\int d^2p_1 e^{-\beta\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m}} \dots \int d^2p_N e^{-\beta\frac{\vec{p}_N^{\,2}}{2m}}\right]$$

Al ser las variables mudas, las integrales anteriores son en realidad la misma integral. Bastará con calcular una y elevarlo a N:

$$Q(\alpha,\beta) = \sum_N e^{-\alpha N} \frac{S^N}{h_0^{2N} N!} \left(\int d^2p \, e^{-\beta \frac{\vec{p}^2}{2m}} \right)^N$$

Calculemos dicha integral, sabiendo que podemos separar $d^2p = dp_x dp_y$:

$$\int d^2p \, e^{-\beta \frac{\vec{p}^2}{2m}} = \left[\int dp_x \, e^{-\beta \frac{p_x^2}{2m}} \right] \left[\int dp_y \, e^{-\beta \frac{p_y^2}{2m}} \right]$$

Análogamente, tenemos la misma integral dos veces, calcularemos una y la elevaremos al cuadrado:

$$\left[\int dp_x \, e^{-\beta \frac{p_x^2}{2m}} \right]^2$$

Esta integral es del tipo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Siendo en nuestro caso:

$$a = \frac{\beta}{2m}$$

De modo que la integral nos queda:

$$\left[\int dp_x \, e^{-\beta \frac{p_x^2}{2m}} \right]^2 = \frac{2\pi m}{\beta}$$

Sustituyendo obtenemos:

$$Q(\alpha,\beta) = \sum_N e^{-\alpha N} \frac{S^N}{h_0^{2N} N!} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^N$$

Sabiendo que la función de una partícula es:

$$\xi = \frac{S}{h_0^2} \frac{2\pi m}{\beta}$$

De forma que podemos escribir la macrofunción de partición:

$$Q(\alpha,\beta) = \sum_N e^{-\alpha N} \frac{1}{N!} \xi^N = \exp(\xi \, e^{-\alpha})$$

Aplicando el logaritmo en ambos miembros, llegamos a:

$$\log Q = \ \xi \, e^{-\alpha}$$

a) A partir de la macrofunción de partición, calculamos el valor de <N> como:

$$< N > = \ - \frac{\partial}{\partial \alpha} \log Q \Big|_{\beta}$$

$$< N > = \ - \frac{\partial}{\partial \alpha} \, \xi \, e^{-\alpha} \Big|_{\beta} \ = \ \xi \, e^{-\alpha}$$

Entonces, podemos expresar <N>:

$$< N > = \log Q$$

y en función de α, S y β :

$$< N > = \frac{2\pi m}{\beta} \, \frac{S}{{h_0}^2} e^{-\alpha}$$

b) Para la energía media:

$$< H > = \ - \frac{\partial}{\partial \beta} \log Q \Big|_{\alpha}$$

$$< H > = \ - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \, \frac{S}{{h_0}^2} \, e^{-\alpha} \right) \Bigg|_{\alpha} \ = \ \frac{2\pi m}{\beta^2} \, \frac{S}{{h_0}^2} \, e^{-\alpha}$$

Luego:

$$< H > = < N > k_B \, T$$

Para el cálculo de la presión, utilizamos la relación:

$$\beta \, P \, S = \ \log Q$$

De modo que:

$$P \, S = \frac{< N >}{\beta}$$

y por tanto:

$$P \, S = \ < N > \ k_B \, T$$