Carmen García Tardío
Clara Gómez García
María Jesús Macías Castillo

Problema 4:

En nuestro mundo tridimensional, la densidad de estados de frecuencia ω de la radiación contenida en una cavidad es $\mathcal{N}(\omega) \propto V\omega^{\gamma}$, siendo $\gamma = 2$, y la energía por unidad de volumen de la radiación es proporcional a T^{α}, siendo $\alpha = 4$. Obtén los valores de γ y α en un universo de d dimensiones.

- Cálculo de la densidad de estados de frecuencia ω, $\mathcal{N}(\omega)d\omega$:

La discretización del número de ondas para cada componente es

$$k_i = n_i \frac{\pi}{L} \; con \; n_i = 1,2,3 \ldots$$

donde L es la arista del recinto.

Por lo que:

$$k_i \sim n_i$$

De tal forma que el módulo del vector de onda es $k \sim n$.

Por el teorema de Pitágoras:

$$n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \cdots + n_d^2$$

Así, tenemos que:

$$k^2 = k_1^2 + \cdots + k_d^2 \propto n_1^2 + \cdots + n_d^2 = n^2$$

Si admitimos que la longitud de onda de las ondas electromagnéticas es mucho menor que la dimensión lineal más pequeña del recinto, podremos despreciar los efectos de las paredes de la cavidad y escoger las condiciones en los límites más convenientes para nuestros cálculos. Vamos entonces a tomar condiciones periódicas en los límites y considerar que el campo eléctrico es nulo en las paredes.

Ahora bien, en tres dimensiones obteníamos que el número de ondas planas con vector de onda cuyo módulo está comprendido entre k y $k + dk$ venía dado por:

$$\mathcal{N}(k)dk = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$$

Donde se está considerando la región definida por n_i que corresponde al número de estados con la misma energía en el espesor comprendido entre n y $n + dn$, en este caso una corteza esférica.

Análogamente, para 2 dimensiones teníamos que el número de ondas planas con vector de onda cuyo módulo está comprendido entre y $k + dk$ era:

$$\mathcal{N}(k)dk \propto k\, dk$$

Donde la región definida por n_i es un círculo.

De forma genérica, en d dimensiones:

$$\mathcal{N}(k)dk \propto k^{d-1}dk$$

Por lo que:

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{N}(k)dk \propto k^{d-1}dk \\ \mathcal{N}(k)dk = \mathcal{N}(n)dn\end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{N}(n)dn \propto n^{d-1}dn$$

Teniendo en cuenta la relación entre k y ω:

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$$\omega = \frac{c\pi}{L}n \Rightarrow d\omega = \frac{c\pi}{L}dn$$

De esta forma, como sabemos que:

$$\mathcal{N}(\omega)d\omega = \mathcal{N}(n)dn$$

Podemos sustituir ahí el resultado anterior:

$$\mathcal{N}(\omega)\frac{c\pi}{L}dn \propto n^{d-1}dn$$

Despejando $\mathcal{N}(\omega)$:

$$\mathcal{N}(\omega) \propto n^{d-1}\frac{L}{c\pi}$$

Y teniendo en cuenta que $n = \frac{L}{c\pi}\omega$:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{N}(\omega) \propto \left(\frac{L}{c\pi}\right)^{d} \omega^{d-1}}}$$

De este modo, $\mathcal{N}(\omega) \propto L^d \omega^{d-1}$ con $\boxed{\boldsymbol{\gamma = d - 1}}$.

Podemos comprobar que, efectivamente, para 3 dimensiones $\mathcal{N}(\omega) \propto V\omega^2$.

Carmen García Tardío
Clara Gómez García
María Jesús Macías Castillo

- Cálculo de la energía por unidad de volumen:

Como lo que nos piden en el ejercicio son relaciones de proporcionalidad, vamos a englobar en un mismo término lo que permanece constante:

$$A = \left(\frac{1}{c\pi}\right)^d$$

La energía por unidad de volumen que hay en forma de radiación electromagnética entre ω y $\omega + d\omega$ será:

$$\frac{\langle E \rangle}{V} = \int_0^\infty d\omega \ \rho(\omega)$$

Donde $\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega \, f(\omega)}{L^d}$,

Siendo $f(\omega)d\omega$ el número medio de fotones en el intervalo de frecuencias considerado:

$$f(\omega)d\omega = \mathcal{N}(\omega)d\omega \, \langle n(\omega) \rangle$$

Así, como lo que consideramos son fotones ($\mu = 0$):

$$\langle n(\omega) \rangle = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \Rightarrow f(\omega) = AL^d \ \omega^{d-1} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

Por tanto, volviendo atrás:

$$\rho(\omega) = \hbar\omega \ A \ \omega^{d-1} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

Si llamamos A' a la nueva constante obtenida:

$$A' = \hbar \ A$$

$$\rho(\omega) = A' \ \omega^d \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

Sustituimos en la ecuación para obtener la energía:

$$\frac{\langle E \rangle}{V} = \int_0^\infty d\omega \ \rho(\omega) = A' \int_0^\infty d\omega \ \omega^d \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

Para resolver la integral y adimensionalizar, hacemos el cambio de variable:

$$\beta\hbar\omega = x \longrightarrow \omega = \frac{x}{\beta\hbar} \Rightarrow d\omega = \frac{1}{\beta\hbar} dx$$

$$\frac{\langle E\rangle}{V} = A'\left(\frac{1}{\beta\hbar}\right)^{d+1}\int_0^\infty dx\ x^d\,\frac{1}{e^x-1}$$

Teniendo en cuenta que la integral es del tipo:

$$\int_0^\infty dx\ x^{s-1}\,\frac{1}{e^x-1} = \Gamma(s)\zeta(s)$$

Obtenemos:

$$\frac{\langle E\rangle}{V} = A'\left(\frac{1}{\beta\hbar}\right)^{d+1}\Gamma(d+1)\zeta(d+1) = (k_B T)^{d+1}\frac{1}{\hbar^{d+1}}A'\Gamma(d+1)\zeta(d+1)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\langle E\rangle}{V} \propto T^{d+1} \Rightarrow \alpha = d+1}}$$

Donde $V = L^d$.

Para 3 dimensiones vemos que $\frac{\langle E\rangle}{V} \propto T^4$, como nos decía el enunciado.

Aquí terminaría el ejercicio, pero podemos aprovechar para calcular el número medio de fotones por unidad de volumen $\frac{\langle N\rangle}{V}$ y la energía media por fotón, $\frac{\langle E\rangle}{\langle N\rangle}$.

$\langle N\rangle$ lo podemos obtener a partir de la expresión ya conocida del número medio de fotones en el intervalo de frecuencias dado $f(\omega)d\omega$:

$$\langle N\rangle = \int_0^\infty d\omega\ f(\omega)$$

Donde $f(\omega) = A\,L^d\,\omega^{d-1}\,\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$

$$\frac{\langle N\rangle}{L^d} = A\int_0^\infty d\omega\ \omega^{d-1}\,\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

Haciendo el mismo cambio de variables que en el caso anterior: $\beta\hbar\omega = x$

$$\frac{\langle N\rangle}{L^d} = A\left(\frac{1}{\beta\hbar}\right)^{d}\int_0^\infty dx\ x^{d-1}\,\frac{1}{e^x-1}$$

De nuevo, como tenemos el mismo tipo de integral que antes:

$$\frac{\langle N\rangle}{L^d} = A\left(\frac{1}{\beta\hbar}\right)^{d}\Gamma(d)\zeta(d) = A\frac{1}{\hbar^d}(k_B T)^d\Gamma(d)\zeta(d)$$

Por tanto:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\langle N\rangle}{L^d} \propto T^d}}$$

Para la energía media por fotón $\frac{\langle E\rangle}{\langle N\rangle}$:

$$\frac{\langle E\rangle}{\langle N\rangle} = \frac{AL^d \hbar^{d+1}(k_B T)^{d+1}\Gamma(d+1)\zeta(d+1)}{AL^d \hbar^{d+1}(k_B T)^d \Gamma(d)\zeta(d)}$$

Simplificando:

$$\frac{\langle E\rangle}{\langle N\rangle} = k_B T \frac{\Gamma(d+1)\zeta(d+1)}{\Gamma(d)\zeta(d)}$$

Es decir:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\langle E\rangle}{\langle N\rangle} \propto k_B T}}$$