

PROBLEMAS ADICIONALES DE FÍSICA ESTADÍSTICA. Hoja 4. Curso 2009/2010

1. Calcula $\langle v_x \rangle$ y $\langle v_x^2 \rangle$ en un gas de Fermi en el cero absoluto.
2. La aproximación lineal de la distribución de Fermi consiste en sustituir la verdadera distribución $n(\epsilon)$ por tres tramos lineales tales que $n(\epsilon) = 1$ si $0 \leq \epsilon \leq \mu - a$ y $n(\epsilon) = -(1/(a+b))[\epsilon - (\mu + b)]$ si $\mu - a \leq \epsilon \leq \mu + b$, siendo 0 en cualquier otro caso. Los valores de a y b se determinan de forma que la distribución aproximada reproduzca correctamente los valores exactos de $n(\epsilon)$ y su derivada en $\epsilon = \mu$. (a) Determina a y b . ¿Es exacta la aproximación lineal en el cero absoluto? (b) La densidad de estados en un gas de Fermi tridimensional es $\mathcal{N}(\epsilon) = AV\epsilon^{1/2}$, siendo A una constante. Obtén la energía de Fermi μ_0 . ¿Qué significado físico tiene la temperatura de Fermi T_F ? (c) Utiliza la aproximación lineal para hallar la expresión que relaciona el nivel de Fermi μ con la temperatura T y la densidad N/V .
3. Un gas de N bosones se encuentra encerrado en un volumen $V = L^d$ en un universo de d dimensiones. Teniendo en cuenta que los niveles energéticos de traslación de una partícula en una caja de arista L son $\epsilon = (\hbar^2 \pi^2 / 2mL^2)(n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_d^2)$, con $n_i = 1, 2, \dots$, prueba que
 - (a) La densidad de estados $\mathcal{N}(\epsilon)$ es proporcional a $V\epsilon^{(d-2)/2}$ en el límite de volúmenes grandes.
 - (b) La temperatura de condensación T_0 depende de la densidad N/V como $T_0 \propto (N/V)^{2/d}$.
 - (c) Asimismo determina a qué potencia de la temperatura es proporcional la energía media por unidad de volumen $\langle E \rangle / V$ si $T < T_0$.
4. En nuestro mundo tridimensional, la densidad de estados de frecuencia ω de la radiación contenida en una cavidad es $\mathcal{N}(\omega) \propto V\omega^\gamma$, siendo $\gamma = 2$, y la energía por unidad de volumen de la radiación es proporcional a T^α , siendo $\alpha = 4$. Obtén los valores de γ y α en un universo de d dimensiones.