FÍSICA ESTADÍSTICA **(Lic. en Física, UEx; Curso 2007/2008)**

Examen Final **27 de Junio de 2008**

1. Consideremos un rotor rígido (como una molécula diatómica, por ejemplo) que está en contacto con un baño térmico a la temperatura T.

   a) Empecemos describiendo el rotor desde un punto de vista clásico.

      1) Si el momento de inercia del rotor es I, ¿cuál es la expresión para la energía de rotación E?
      2) Teniendo en cuenta que el rotor rígido tiene 2 grados de libertad, calcula la energía media $\langle E \rangle$ y el calor específico $C = \partial \langle E \rangle / \partial T$.

   b) Hagamos ahora la descripción cuántica. Los niveles energéticos de rotación están discretizados y vienen dados por $E_\ell = \ell(\ell+1)\epsilon_0$, donde $\epsilon_0 = \frac{1}{2}\hbar^2/I$ y $\ell = 0, 1, 2, \ldots$. Cada nivel de energía E_ℓ tiene una degeneración igual a $2\ell + 1$.

      1) Escribe la expresión en forma de suma para la función de partición ζ.
      2) Si $k_B T \gg \epsilon_0$ la suma anterior puede aproximarse por una integral. ¿Por qué? Calcula en ese caso $\langle E \rangle$ y C.
      3) Si $k_B T \ll \epsilon_0$ la suma puede aproximarse por los dos primeros términos. ¿Por qué? Calcula en ese caso $\langle E \rangle$ y C.
      4) ¿Coincide alguno de los dos resultados anteriores con la predicción clásica?
      5) Representa de un modo cualitativo $\langle E \rangle$ y C en función de la temperatura.

2. *a*) Dadas las siguientes ecuaciones o enunciados, describe brevemente lo que representan, indicando también si son válidos en general (para sistemas clásicos) o sólo para gases ideales.

      1) Principio de equipartición.
      2) $F = -k_B T \ln Z$
      3) $pV = N k_B T$
      4) $\Delta E/E \sim N^{-1/2}$
      5) $\widetilde{N} \approx \langle N \rangle$
      6) $f(\vec{v}) = n(m/2\pi k_B T)^{3/2} \exp(-mv^2/2k_B T)$
      7) $\langle v_x \rangle = 0$
      8) $\Phi_0 = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$

   b) Considérese un sistema de partículas que interaccionan mediante el potencial de *esferas penetrables* siguiente:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \epsilon, & 0 \leq r \leq \sigma \\ 0, & r > \sigma \end{cases}$$

   donde $\epsilon > 0$.

      1) Sin hacer cálculos explícitos, sino mediante argumentos físicos, justifica qué límite hay que tomar (o bien el de temperaturas altas o bien el de temperaturas bajas) para que el sistema anterior se comporte como un sistema de esferas duras. ¿Y para que se comporte como un gas ideal?
      2) Calcula el segundo coeficiente del virial $B_2(T)$ para el potencial anterior. ¿Hay temperaturas para las que $B_2(T) < 0$? ¿Por qué? Tomando los límites $T \to 0$ y $T \to \infty$ en $B_2(T)$, comprueba que el resultado obtenido está de acuerdo con el apartado anterior.

3. Considerar un sistema compuesto por N partículas que no interaccionan, localizadas y con un momento magnético μ. El sistema está en presencia de un campo magnético H. Cada partícula presenta dos niveles de energía: $E = 0$ y $E = 2\mu H$.

   a) La entropía, S, del sistema puede ser escrita en la forma $S = k_B \log \Omega(E)$, donde E es la energía total del sistema. Explicar el significado de $\Omega(E)$.

   b) Escribir una ecuación para $S(n)$, donde n es el número de partículas en el estado mas energético. Dibujar de manera aproximada $S(n)$.

c) Derivar la fórmula de Stirling:

$$\log n! \simeq n \log n - n$$

válida para n grande, aproximando $\log n!$, mediante una integral.

d) Usando la fórmula de Stirling, encontar el valor de n para el cuál $S(n)$ es máximo.

e) Tratando E como una variable continua, demostrar que el sistema puede tener temperaturas absolutas negativas.

f) Discutir por qué en este sistema pueden aparecer temperaturas negativas y no en un gas confinado en una caja.

4. Un gas de N partículas sin espín de masa m y no-relativistas están confinadas en un volumen V a una temperatura T.

   a) Calcular la densidad de estados como función de la energía.

   b) Escribir una expresión integral, la cual define implícitamente determina $\mu(T)$. ¿Cómo varía $\mu(T)$ cuando decrece la temperatura?

   c) Calcular la tenmperatura de la transición de Bose-Einstein, T_c.

   d) ¿Cuánto vale $\mu(T)$ si $T < T_c$?

   e) Escribir una expresión para la energía total del gas, válida para $T < T_c$.