

**GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA.**  
**Examen Convocatoria de Junio [3/6/2020]**

---

1. Describir brevemente y asignar tiempos, *redshifts*,  $a(t_0)/a(t)$  y temperaturas (fotones y neutrinos) a dos eventos en la historia del universo desde que la temperatura fue de  $T = 1 \text{ GeV}$  hasta que alcanzó  $T = 500 \text{ K}$ .

(1 punto)

---

2. Calcular la temperatura de los fotones tres minutos después del comienzo del universo. Justificar la respuesta.

(1.5 puntos)

---

3. Considérese un universo plano con solo materia.

1. Calcular  $a(t)$ ,  $t(z)$  y  $d_A(z)$  en función de  $H_0^{-1}$ .

2. Calcular la edad del universo hoy y cuando  $z = 100$ . Asumir  $h = 0.68$ .

3. Calcular  $d_A(z)$  cuando  $z = 100$ .  $h = 0.68$ .

4. Demostrar que la función  $d_A(z)$  presenta un máximo. Determinar el valor de  $z$  del máximo.

Ayuda:  $d_A(z) = d_L/(1+z)^2$ , donde  $d_L$  es la distancia-luminosidad.  $d_A$  es la distancia diámetro-angular.

Nota: En este problema, hay que realizar explícitamente a mano todos los cálculos, incluidas las integrales y no se puede usar el Notebook de Mathematica. Hay que justificar todos los pasos en la hoja del examen.

(2.5 puntos)

---

4. Considérese la siguiente métrica:

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1+x^2} + x^2 dy^2.$$

Calcular:

1. Las ecuaciones de las geodésicas:  $y(s)$  y  $x(s)$ .
2. Los símbolos de Christoffel (método Lagrangiano).
3. Encontrar la geodésica que tiene como condición inicial:  $y(0) = 0$ ,  $x(0) = b$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ . Notación:  $\dot{f} = df/ds$ .
4. ¿Es plano este espacio?
5. Un vector de Killing y su cantidad conservada asociada.
6. Demostrar que el siguiente vector

$$\mathbf{w} = \sqrt{1+x^2} \cos(y) \partial_x - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \sin(y) \partial_y$$

es un vector de Killing. Para ello demostrar que satisface las siguientes ecuaciones:

$$\nabla_i w_j + \nabla_j w_i = 0.$$

Nota:  $\mathbf{w} = \{w^i\}$ .

(4 puntos)

---

5. ¿Cuál es la masa de un agujero negro que se creó inmediatamente después del comienzo del universo y que se evaporó completamente cuando el universo se hizo transparente?

(1 punto)

---