GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA.
Examen Convocatoria de Mayo [4/6/2021]

---

1. Describir brevemente y asignar tiempos, *redshifts*, $a(t_0)/a(t)$ y temperaturas (fotones y neutrinos) a tres eventos en la historia del universo desde que su *redshift* fue de $z = 4000$ hasta que alcanzó $z = 0.2$.

(2 puntos)

---

2. Calcular el tiempo necesario para que la temperatura del Universo (temperatura de los fotones) pase de 50 GeV a 30 GeV. ¿Y de $z = 100$ a $z = 1$? Considerar $\Omega_R = 0$, $\Omega_M = 0.31$, $\Omega_\Lambda = 0.69$ y $h = 0.68$.

Justificar la respuesta.

(1 punto)

---

3. ¿ En que momento (en millones de años desde el Big Bang) el parámetro de deceleración, $q(t)$, pasó de ser positivo (deceleración) a negativo (aceleración)? Considerar $\Omega_R = 0$, $\Omega_M = 0.31$, $\Omega_\Lambda = 0.69$ y $h = 0.68$.

Nota: $q(t) \equiv -\ddot{a}a/\dot{a}^2$.

(2 puntos)

---

4. Considérese la siguiente métrica

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\tau^2 = -y^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}y^2 \,.$$

Calcular:

1. Las ecuaciones de las geodésicas en función de τ.
2. Los símbolos de Christoffel.
3. Escribir la ecuación geodésica de género tiempo que satifsace la función $t(y)$. ¿Podrías resolverla?

   Nota. Estos tres primeros apartados hay que resolverlos usando el método lagrangiano.
4. Calcular la cuadrivelocidad de un observador $\boldsymbol{u}$ que tiene constante la coordenada y.
5. Calcular el módulo de la cuadriaceleración $a = \sqrt{a_\mu a^\mu}$, donde $a^\mu \equiv u^\nu \nabla_\nu u^\mu$, para el $\boldsymbol{u}$ que ha sido calculado en el apartado anterior.
6. Encontrar un vector de Killing (ξ) y verificar que satisface $\xi_{(\mu;\nu)} = 0$.

7. ¿Es plano este espacio-tiempo?

(3 puntos)

---

5. Considerar la siguiente métrica (estática y con simetría esférica)

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\tau^2 = -f_1(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{f_1(r)}\mathrm{d}r^2 + f_2^2(r)\mathrm{d}\Omega_2^2\,,$$

con $\mathrm{d}\Omega_2^2 \equiv \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$.

- Calcular los dos vectores de Killing asociados a t y a ϕ y sus cantidades conservadas asociadas, que denotaremos por e y l respectivamente.
- Demostrar que las partículas siguen una órbita ecuatorial y que su ecuación del movimiento es
$$\dot{r}^2 + V(r) = e^2\,,$$
con
$$V(r) = f_1(r)\left(\epsilon + \frac{l^2}{f_2^2(r)}\right)\,,$$
donde $\epsilon = 0$ si las partículas tienen masa nula ($\dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}\lambda$, donde λ es un parámetro afín) y $\epsilon = 1$ si las partículas son masivas ($\dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau$).
- Encontrar las condiciones que deben de satisfacer las funciones f_1 y f_2 para que esta métrica admita geodésicas de género luz con la coordenada r constante.
- Escribir las funciones $f_1(r)$ y $f_2(r)$ para la métrica de Schwarzschild. Usando los resultados del apartado anterior, encontrar el valor de r en la métrica de Schwarzschild para el cual es posible tener geodésicas de género luz con r constante.

(2 puntos)
