GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA.
Examen Convocatoria de Mayo [30/5/2022]

---

1. Describe brevemente y asigna tiempos, *redshifts*, $a(t_0)/a(t)$ y temperaturas (fotones y neutrinos) a tres eventos en la historia del universo desde que su *redshift* fue de $z = 5000$ hasta que alcanzó $z = 500$.

(2 puntos)

---

2. Supongamos un universo plano constituido por una sola componente cuya ecuación de estado se escribe como

$$p = \omega\rho\,,$$

con $1 + 3\omega > 0$. Calcula

- $\rho(a)$.
- $a(t)$.
- $H(t)$.
- La edad del universo como función de z, w, Ω y H_0.

(1.5 puntos)

Elige una de las dos preguntas siguientes (**3a** o **3b**):

3a. Calcula el tiempo necesario para que el universo se enfrie desde las siguientes temperaturas:

- De 130 MeV a 120 MeV.
- De 80 MeV a 8 MeV.
- De 0.5 eV hasta hoy.

Algunos datos. $h = 0.674$, $T_{\gamma,0} = 2.7255$ K, $\Omega_M = 0.315$, $\Omega_\Lambda = 0.685$ y $\Omega_R \simeq 0$.

(1 punto)

3b. Si asumimos que $a(t) = (t/t_0)^\alpha$, donde $\alpha > 0$ y t_0 es la edad del universo.

- Calcula $H(z)$.
- ¿Para qué valor de α se verifica que la edad del universo es exactamente $1/H_0$?

(1 punto)

---

4. Considera la siguiente métrica bidimensional:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2}{(1+r^2)^2} \,.$$

- Calcula las ecuaciones de las geodésicas en función de s y los símbolos de Christoffel.

  Nota. Este apartado hay que resolverlo usando el método lagrangiano.

- ¿Cuál es el escalar de curvatura de este espacio?

- Calcula un vector de Killing y comprueba explícitamente que satisface $\xi_{(i;j)} = 0$.

- Expresa la base ortonormal asociada a esta métrica $\{\boldsymbol{e}_{\hat{r}}, \boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}\}$ en función de la base coordenada $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta\}$ original. Calcula las siguientes cantidades: R^{rr}, $R^{\theta\theta}$, $R_{\hat{r}\hat{r}}$ y $R_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$.

- ¿Es plano este espacio? Justifica la respuesta.

(3 puntos)

---

5. Calcula el modulo de la cuadriaceleración ($\boldsymbol{a}$) de un observador estático (r, θ y ϕ constantes) en la siguiente métrica

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}v^2 + 2\mathrm{d}v\mathrm{d}r + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2 \,,$$

donde $\mathrm{d}\Omega_2^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$.

Nota: La cuadriaceleración está definida como $\boldsymbol{a} = \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}$ donde $\boldsymbol{u}$ es la cuadrivelocidad del observador estático.

(1.5 puntos)

---

6. En un espacio tiempo en 1+1 dimensiones el tensor de Riemann se puede escribir, sin pérdidad de generalidad, como

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = A\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}\right) \,.$$

Responde a las siguientes preguntas:

- Identifica A.

- Usando la forma precedente del tensor de Riemann escribe la ecuación de Einstein. ¿ Qué conclusiones puedes extraer?

(1 punto)