

FÍSICA ESTADÍSTICA.

Examen Final. 15 de Septiembre de 2006.

1. Sean N partículas sin espín no interaccionantes confinadas en un pozo cuadrado de altura infinita y anchura L . Los niveles de energía de una partícula son:

$$\epsilon_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Lo que sigue se refiere a la estadística de Maxwell-Boltzmann.

1. Escribir una expresión general para la función de partición, Z .
2. Demostrar que a baja temperatura, la función de partición de una partícula ζ , se escribe como

$$\zeta = e^{-\theta/T} + e^{-4\theta/T} + \dots,$$

con $\theta = \hbar^2 \pi^2 / (2mk_B L^2)$.

3. Demostrar que a alta temperatura

$$\zeta = \frac{L}{L_Q}, \quad \text{con } L_Q = \left(\frac{2\pi \hbar^2}{mk_B T} \right)^{1/2}.$$

4. Calcular la presión y la energía libre de Helmholtz en los límites $T \rightarrow 0$ (establecer la dependencia en θ) y $T \rightarrow \infty$ (establecer la dependencia en T).

(2.5 puntos)

2. Considérense un gas de N electrones, no interaccionantes, confinados en un volumen tridimensional V y ultrarrelativistas.

1. Calcular la densidad de estados como función de la energía.
2. Demostrar que la energía de Fermi está dada por

$$\epsilon_F = \pi \hbar c \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{1/3}.$$

3. Calcular la energía interna a $T = 0$, expresando la respuesta en términos de N y V y de las constantes fundamentales.
4. Usando el apartado anterior, demostrar que la presión, p , verifica

$$p \propto \hbar c \left(\frac{N}{V} \right)^{4/3}.$$

(2.5 puntos)

3. Calcular, en la colectividad canónica, el potencial químico de N osciladores armónicos bidimensionales (débilmente interaccionantes) anisótropos con potencial:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) ,$$

donde m es la masa de la partícula.

(2.5 puntos)

4. Usando el desarrollo del virial, calcular la presión y la energía de un gas bidimensional con el siguiente potencial (círculos penetrables):

$$\phi(r) = \begin{cases} U_0 & r < a , \\ 0 & r > a . \end{cases}$$

donde $U_0 > 0$.

(2.5 puntos)
