

PROBLEMAS DE GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA. Curso 2022/2023

Hoja 1 (Temas 1 y 2)

1. Si la masa inercial m_{iner} fuese distinguible de la gravitacional m_{grav} , ¿Cuál sería el periodo T de un péndulo simple de longitud l situado a una distancia r de una masa esférica M_{grav} ? ¿Se vería afectado el periodo de un péndulo de torsión?
2. En 1930 se descubre Plutón, y en 1978 su satélite Caronte. En junio de 1980 logró medirse el radio de la órbita, casi circular, de Caronte: $R = 19.6 \times 10^3$ km y también su periodo $T = 6.38725$ días. Los diámetros de Plutón y de Caronte son respectivamente $d_{\text{Plut}} = 2.3 \times 10^3$ km y $d_{\text{Car}} = 1186$ km. Suponiendo que las densidades de Plutón y Caronte son aproximadamente iguales calcular la masa conjunta del sistema y sus densidades.
3. Supóngase una galaxia de una masa M_G prácticamente concentrada en su núcleo de radio R_G . Pruébese que la velocidad orbital $v(r)$ de una estrella a una distancia r del centro de la galaxia satisface:
 - a) $v(r) \propto r$ si $r < R$.
 - b) $v(r) \propto 1/\sqrt{r}$ si $r > R$.
4. Sea el cuadvivector aceleración definido como $a^\alpha \equiv d^2x^\alpha/d\tau^2$. Expresar a^α en términos de magnitudes vectoriales tridimensionales.
5. Un cuerpo se considera que está uniformemente acelerado si su cuadvivector aceleración, a^α , tiene dirección espacial constante y magnitud constante $\mathbf{a}^2 = \alpha^2 \geq 0$.
 - Supongamos una nave espacial uniformemente acelerada con $\alpha = 10$ m/s². Si el cuerpo comienza en reposo, calcular su velocidad después de un tiempo t . ¿Qué distancia ha recorrido en este tiempo? ¿En qué tiempo alcanzará una velocidad $v = 0.999c$?
 - Expresar el tiempo t como función del tiempo propio τ . ¿En qué tiempo propio habrá alcanzado la velocidad $v = 0.999c$? ¿Cuánto envejecerá un tripulante de la nave espacial en un viaje desde la Tierra hasta el centro de la galaxia? ¿Y a los confines del universo visible?
 - Si suponemos que la nave espacial es un cohete ideal que es capaz de convertir su masa en reposo en radiación y que eyecta esta radiación con un 100% de eficiencia y colimación perfecta. ¿Cuál será la fracción de la masa inicial del cohete usada como combustible en los dos viajes propuestos en el apartado anterior?
6. Los taquiones son partículas hipotéticas cuya velocidad es mayor que la velocidad de la luz. Supongamos que un emisor de taquiones emite partículas con velocidad constante, en su sistema de referencia, $u > 1$ ($c = 1$). Si el mensaje “taquiónico” es enviado a un observador en reposo situado a una distancia L , ¿cuánto tiempo pasará hasta que se reciba una respuesta “taquiónica”? ¿Cuánto tiempo pasará si el observador distante se está alejando a velocidad v y recibe el mensaje justo cuando está a una distancia L del emisor? Demostrar que si $u > [1 + (1 - v^2)^{1/2}]/v$ la respuesta puede ser recibida antes de ser enviada la señal.
7. Encontrar la matriz de la transformación de Lorentz compuesta, en primer lugar, por un *boost* v_x en la dirección x , seguido por un *boost* v_y en la dirección y . Demostrar que si hubiéramos aplicado los *boosts* anteriores invirtiendo el orden, hubiéramos obtenido una transformación de Lorentz diferente.