1. Originalmente, Maxwell obtuvo su distribución de velocidades $f(\boldsymbol{v})$ a partir de las hipótesis de simetría $f(\boldsymbol{v}) = G(v^2)$ y de separación de variables $f(\boldsymbol{v}) = g(v_x)g(v_y)g(v_z)$, siendo G y g funciones a determinar. Prueba secuencialmente las siguientes igualdades:

$$\text{(i) } G(3v_x^2) = [g(v_x)]^3$$

$$\text{(ii) } G(v^2) = [G(3v_x^2)G(3v_y^2)G(3v_z^2)]^{1/3}$$

$$\text{(iii) } 3\Psi(v_x^2) = \Psi(3v_x^2) + 2\Psi(0), \text{ siendo } \Psi(x) \equiv \log G(x)$$

   La última igualdad indica que $\Psi(x)$ es una función lineal: $\Psi(x) = Ax + B$. Determina A y B y obtén finalmente $f(\boldsymbol{v})$ imponiendo la condición de normalización y la de que $\langle v^2 \rangle = 3k_BT/m$.

2. Utiliza la distribución de Maxwell-Boltzmann para obtener $\langle 1/v \rangle$. Compara con $1/\langle v \rangle$.

3. ¿Qué fracción de las moléculas de un gas tienen componentes x de la velocidad comprendidas entre $-\widetilde{v}$ y $+\widetilde{v}$, siendo $\widetilde{v}$ la velocidad más probable de las moléculas? Expresa el resultado con ayuda de la función error $\mathrm{erf}(x)$, definida como

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy\; e^{-y^2} \; .$$

4. Un gas ideal monoatómico está en equilibrio térmico a la temperatura T. Halla el número medio de moléculas por unidad de volumen cuyas energías están comprendidas entre ϵ y $\epsilon + d\epsilon$. ¿Cuál es la energía más probable $\widetilde{\epsilon}$? Compara con $\frac{1}{2}m\widetilde{v}^2$.

5. Al objeto de obtener estimaciones de tipo cualitativo es a veces útil suponer que las moléculas de un gas se mueven a lo largo de tres ejes mutuamente perpendiculares con velocidad $\langle v \rangle$. Razonando a partir de este modelo simplificado, obtén el número de choques por unidad de área y unidad de tiempo, y la presión.

6. Calcula la velocidad media de las moléculas que escapan por efusión de un recipiente que contiene un gas a la temperatura T. Compara con la velocidad media de las moléculas del gas. Repite el cálculo para la energía cinética media.

7. Se tiene un gas ideal monoatómico en equilibrio a la temperatura T. El recipiente que lo contiene posee en una de sus paredes un pequeño orificio a través del cual pueden escapar partículas del gas por efusión, pasando a un recinto en el que se hace el vacío. Tomemos la dirección z normal al plano del orificio y dirigida hacia el exterior del gas. Calcula el valor absoluto medio de la componente z de la velocidad de las partículas que (a) quedan en el recipiente, (b) atraviesan el orificio abandonando el sistema.

8. En un experimento con un haz molecular, la fuente es un tubo conteniendo hidrógeno a una presión $p_1 = 0.15$ mmHg y a una temperatura $T = 300$ K. En la pared del tubo hay una rendija de 20 mm $\times$ 0.025 mm abierta a una región en la que existe un alto vacío. Opuesta a esta rendija y a 1 m de distancia existe una segunda rendija paralela a la anterior y del mismo tamaño, que actúa como detector, y que está hecha en la pared de un pequeño recinto en el que puede medirse la presión p_2. (a) ¿Cuántas moléculas de H_2 abandonan la rendija fuente por segundo? (b) ¿Cuántas moléculas llegan a la rendija detectora por segundo? (c) ¿Cuál es la presión p_2 en la cámara del detector cuando se ha alcanzado un estado estacionario en el que p_2 es independiente del tiempo, si esta cámara se mantiene a la misma temperatura T que la cámara de la fuente?

9. Calcula el segundo coeficiente del virial para el potencial repulsivo $u(r) = \epsilon(\sigma/r)^s$ con $s > 3$. Comprueba que en el límite $s \to \infty$ se reobtiene el resultado para esferas duras.

10. El modelo de esferas duras adhesivas se define a partir del modelo de interacción de pozo cuadrado en el límite *acoplado* de anchura nula ($\lambda - 1 \to 0$) y profundidad infinita ($\epsilon \to \infty$). ¿Cómo hay que acoplar esos dos límites para que el segundo coeficiente del virial sea finito y distinto del de esferas duras?

11. (a) Calcula el segundo coeficiente del virial para un sistema de *discos* duros de diámetro σ. (b) Calcula la máxima densidad (densidad de máximo empaquetamiento) para un sistema de discos duros. (c) Construye una ecuación de estado aproximada en la que p/nk_BT se exprese como una función racional de la densidad tal que reproduzca el segundo coeficiente del virial (condición de baja densidad) y presente un polo simple a la densidad de máximo empaquetamiento (condición de alta densidad). (d) Utiliza la ecuación de estado anterior para estimar el tercer y cuarto coeficientes del virial.

12. Demuestra que la entropía por partícula $s(T, n)$ de un gas no ideal clásico monoatómico a baja densidad n puede escribirse en primera aproximación en la forma

$$s(T, n) = s_0(T, n) + A(T)n,$$

siendo $s_0(T, n)$ la entropía por partícula del gas ideal. Obtén la expresión de $A(T)$ y prueba que es una función definida negativa.