PROBLEMAS DE FÍSICA ESTADÍSTICA. Curso 2009/2010. **Hoja de Problemas 4**

1. Aplica el colectivo canónico a un sistema de fermiones y prueba que

$$\langle n_r \rangle = [(Z_N^{(r)}/Z_{N-1}^{(r)})e^{\beta\epsilon_r} + 1]^{-1}$$

   siendo $Z_N^{(r)}$ la función de partición de N partículas cuando el estado r se excluye. Haciendo las aproximaciones adecuadas, obtén la distribución de Fermi.

2. Sea P_R la probabilidad de que un gas ideal cuántico en equilibrio se encuentre en un estado R tal que n_1 partículas ocupen el estado de partícula 1, n_2 partículas ocupen el estado 2,..., n_r partículas ocupen el estado r, ... Partiendo de P_R determina la probabilidad $p_r(n_r)$ de que n_r partículas ocupen el estado de partícula r, independientemente de los números de ocupación de los restantes estados. Particulariza para las estadísticas de Fermi-Dirac y Bose-Einstein, expresando el resultado en términos del número medio de partículas en el estado r en cada caso.

3. Prueba que $(\Delta n_r)^2 \equiv \langle n_r^2 \rangle - \langle n_r \rangle^2 = -k_B T \partial \langle n_r \rangle / \partial \epsilon_r$. Aplica el resultado a las estadísticas de Fermi-Dirac, Bose-Einstein y Maxwell-Boltzmann.

4. Expresa la entropía de un gas ideal cuántico exclusivamente en función de $\langle n_r \rangle$. Toma el límite clásico.

5. Considérese un gas monoatómico ideal cuántico contenido en un volumen V. Cada estado cuántico r de una partícula contribuye a la presión media del gas $\langle p \rangle$ con $p_r = -\partial\epsilon_r/\partial V$. (a) Prueba que $\langle p \rangle = \frac{2}{3}\langle E \rangle / V$. (b) Relaciona la varianza $(\Delta p)^2 \equiv \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$ con la varianza $(\Delta E)^2$ de la energía. (c) Demuestra que $(\Delta p)^2 = (2k_B T/3V)\partial\langle p \rangle/\partial T$. (d) Calcula explícitamente la dispersión relativa $\Delta p / \langle p \rangle$ en el límite clásico.