PROBLEMAS ADICIONALES DE GRAVITACIÓN y COSMOLOGÍA Curso 2012/2013

1. La potencia (en forma de ondas gravitacionales) emitida por un sistema binario en una órbita circular es:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32c^5}{5G}\left(\frac{\mu}{M}\right)^2\left(\frac{GM}{c^2 a}\right)^5$$

donde M es la masa total, μ es la masa reducida y a es el radio de la órbita.

   (a) ¿Cuánto tiempo tardará el sistema binario en colapsar?

   (b) Demostrar
$$-\frac{3}{2E}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$$
donde P es el periodo de la órbita.

   (c) Generalizar los cálculos anteriores al caso de una órbita elíptica (en este caso a es el semieje mayor de la órbita). Ayuda: Usar el teorema del virial.

Un sistema binario muy interesante es el pulsar binario 1913+16. Fue descubierto en 1975 por Taylor y Hulse, quienes recibieron el premio Nobel en 1993 por la fuerte evidencia que obtuvieron de emisión de ondas gravitacionales. Un pulsar es una estrella de neutrones con periodos de rotación de aproximadamente 10^{-2} a 10^{-1}s, emitiendo pulsos regulares de radiación con una gran estabilidad que hace de ellos relojes muy precisos. El sistema binario (formado por un pulsar y su acompañante) tienen masas aproximadamente iguales $m_{1,2} \approx 1.4 M_{\mathrm{Sol}}$ y el periodo orbital es de 7.8 horas. La excentricidad de la órbita es $e = 0.617$.

   (a) Asumiendo que la órbita es circular, calcular el tiempo de colapso del sistema y la variación con el tiempo del periodo orbital (hoy).

   (b) Si una sistema binario en una órbita con excentricidad $e = 0.617$ radía 11.8 veces mas energía que si la orbita fuera circular, recalcular la variación del periodo con el tiempo (hoy).

El resultado experimental es:

$$\frac{dP}{dt} = -(2.1 \pm 0.4) \times 10^{-12}$$

Discutir los resultados obtenidos.

2. Consideremos sobre la 2-esfera el vector $\boldsymbol{A}$ que es igual a $\boldsymbol{e}_\theta$ en el punto ($\theta = \theta_0$, $\phi = 0$). ¿Cuál es el valor del vector $\boldsymbol{A}$ después de que haya sido transportado (mediante transporte paralelo) a lo largo del paralelo $\theta = \theta_0$? ¿Cuál es su módulo después del transporte paralelo? Relacionar este problema con el péndulo de Foucault.

3. Demostrar que en el espacio de Minkowski la ley de conservación del tensor de energía-momento de un fluido ideal $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ proporciona, en el límite no relativista, la ecuación de continuidad y la ecuación de Euler.

4. Calcular la cuadrivelocidad de un observador estático en una métrica de Schwarzschild. Calcular la aceleración covariante ($Du^\alpha/d\tau$) y la aceleración impropia (Du^α/dt).

5. Consideremos dos relojes idénticos, A y B. Ambos han sido sincronizados en reposo en la superficie de la Tierra. A se va a quedar en reposo (en un punto del Ecuador, sobre la superficie terrestre), mientras que B se va a subir en un un avión que va a circumnavegar la Tierra, en dirección Este, por el Ecuador a una altura h y velocidad v respecto a la superficie terrestre. Cuando llega B, se lee lo que marca este reloj ($\Delta\tau_B$) y se comparara con lo marcado por el reloj A ($\Delta\tau_A$). Calcular $\delta = (\Delta\tau_A - \Delta\tau_B)/\Delta\tau_A$ y compararlo con la precisión actual de los relojes atómicos. ¿Qué valor de δ hubiéramos obtenido si B hubiera circumnavegado la Tierra por el Ecuador en dirección Oeste, a la misma velocidad y altura sobre la superficie terrestre que A?

Nota. Pueden asumirse los siguientes valores típicos: altura sobre la superficie terrestre $h \sim 10$ km y velocidad relativa respecto a la superficie terrestre $v \sim 300$ m/s. También pueden despreciarse los tramos de subida y bajada desde la superficie hasta la altura h de vuelo, y las aceleraciones necesarias para conseguir la velocidad de crucero v respecto a la superficie terrestre.

6. Demostrar que:
$$V_{\alpha;\nu\kappa} - V_{\alpha;\kappa\nu} = V_\sigma R^\sigma{}_{\alpha\nu\kappa}\,.$$

7. Demostrar que los vectores Killing satisfacen la ecuación:
$$\xi_{\beta;\alpha} + \xi_{\alpha;\beta} = 0\,.$$

8. (a) Verificar que la métrica de un espacio-tiempo plano con coordenadas (t, x, y, z) que está rotando con velocidad angular Ω alrededor del eje z de un sistema inercial puede escribirse como:
$$ds^2 = -[1 - \Omega^2(x^2 + y^2)]dt^2 + 2\Omega(ydx - xdy)dt + dx^2 + dy^2 + dz^2\,.$$
Ayuda. Pasar a coordenadas esféricas y usar $\phi \to \phi - \Omega t$.

   (b) Calcular las geodésicas para x, y y z en el sistema de referencia rotatorio.

   (c) Demostrar que las geoésicas calculadas, en el límite Newtoniano, son las ecuaciones de la mecánica Newtoniana escritas en un sistema de referencia rotatorio e identificar los diferentes términos.