PROBLEMAS ADICIONALES DE GRAVITACIÓN y COSMOLOGÍA Curso 2013/2014

1. Consideremos la siguiente métrica:

$$ds^2 = -(1 - G(x,y))dt^2 - 2G(x,y)dtdz + (1 + G(x,y))dz^2 + dx^2 + dy^2 \,.$$

   - Escribir las ecuaciones de las geodésicas e identificar los símbolos de Christoffel.
   - Identificar dos vector de Killing y escribir las correspondientes cantidades conservadas para el movimiento de una partícula en la citada métrica. Discutir el género de los vectores de Killing obtenidos.
   - ¿Qué ecuaciones debe de satisfacer la función G para que la métrica anterior sea solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío? Encontrar alguna solución. Si $G(x,y) = \Phi(x^2 + y^2)$ encontar un tercer vector de Killing y dar la expresión explicita (solución de las ecuaciones de Einstein) para G.

2. Construir la métrica del toro $S^1 \times S^1$. ¿Cuál sería su curvatura?

   Considérese el toro usual T_1 (por ejemplo la superficie de un anillo) que es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Escribir la métrica, calcular los símbolos de Christoffel, el tensor de Riemann, el tensor de Ricci y la curvatura escalar.

   ¿Sería posible embeber el toro $S^1 \times S^1$ en $\mathbb{R}^3$?

3. Un espacio-tiempo tiene el siguiente elemento de longitud:

$$ds^2 = -e^{2\phi}dt^2 + h_{ij}dx^i dx^j \,,$$

   donde las funciones ϕ y h_{ij} son independientes de la coordenada t. Demostrar que

$${\Gamma^0}_{\alpha\beta} = \left(V_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} + V_\beta \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \right)$$

   donde $V_\alpha = (1,0,0,0)$.

   Sea u^α la cuadrivelocidad de un observador en reposo en las coordenadas (t,x,y,z) (observador comóvil que satisface $u^i = 0$ y $u^2 = -1$). Demostrar:

$$\nabla_\beta u_\alpha = -u_\beta \nabla_\alpha \phi$$

   lo que permite deducir que $u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = \nabla_\alpha \phi$.

4. Considérese la siguiente métrica que describe un agujero de gusano:

$$ds^2 = -dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

   donde $-\infty < t < \infty$, $-\infty < l < \infty$, $0 \le \theta < \pi$, $0 \le \phi < 2\pi$. b_0 es una constante.

   - Dar una interpretación física a las coordenadas t, l, θ y ϕ.
   - Sean los vectores unitarios $\boldsymbol{e}_{\hat{t}}$, $\boldsymbol{e}_{\hat{l}}$, $\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}$ y $\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}$ que forman una base ortonormal y que apuntan a las direcciones t, l, θ y ϕ. Demostrar que

$$R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = -R_{\hat{l}\hat{\theta}\hat{l}\hat{\theta}} = -R_{\hat{l}\hat{\phi}\hat{l}\hat{\phi}} = \frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2}$$

     y que el resto de las componentes no nulas del tensor de Riemann se obtienen de los anteriores mediante simetrias.
   - Si la métrica es solución de las ecuaciones de Einstein, calcular el correspondiente tensor de energía-momento en la base ortonormal. Discutir la posibilidad de construir este tipo de materia en el laboratorio.

5. Demostrar que en el espacio de Minkowski la ley de conservación del tensor de energía-momento de un fluido ideal ${T^{\alpha\beta}}_{,\beta} = 0$ proporciona, en el límite no relativista, la ecuación de continuidad y la ecuación de Euler.