PROBLEMAS ADICIONALES DE GRAVITACIÓN y COSMOLOGÍA Curso 2014/2015

1. Consideremos un espacio tiempo en 4+1 dimensiones.
   - ¿Cuál sería el potencial gravitatorio newtoniano?
   - Demostrar que la métrica

   $$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_3^2$$

   es solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío (el análogo en 4+1 dimensiones de la solución de Schwarzschild). Nota $d\Omega_3^2$ es la métrica de la 3-esfera S^3 y r_s es una constante.

2. Encontar la función $f(v)$ para que la métrica

   $$ds^2 = 2dudv + f(v)dw^2 + 2dwdz$$

   sea solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío. ¿Qué condiciones debe de verificar la función $f(v)$ para que el espacio-tiempo sea plano?

3. Considérese la métrica:

   $$ds^2 = dudv + \log(x^2 + y^2)du^2 - dx^2 - dy^2$$

   con $0 < x^2 + y^2 < 1$. Escribir las ecuaciones de las geodésicas y demostrar que $K = x\dot{y} - y\dot{x}$ es una constante de movimiento.

4. Calcular las componentes no nulas (módulo simetrías) del tensor de Riemann en la geometría de Schwarzschild en el sistema de coordenadas usual de este métrica. Expresar las componentes calculadas en la base ortonormal asociada a las coordenadas usuales.

   Supongamos un observador cayendo radialmente en un agujero negro de tipo Schwarzschild. Escribir las ecuaciones de la desviación geodésica en el sistema de referencia (ortonormal) asociado al observador.

   Ayuda: realizar la correspondiente transformación de Lorentz (instantánea) en el tensor de Riemann calculado en la base ortonormal asociada a las coordenadas usuales en la geoemetría de Schwarzschild.

5. Demuéstrese que si el vector χ^μ satisface

   $$\nabla_\mu \chi_\nu + \nabla_\nu \chi_\mu = c g_{\mu\nu}$$

   con c una constante positiva y γ es una geodésica de género luz con vector tangente u^μ, entonces $u^\mu \chi_\mu$ es constante a lo largo de la geodésica γ.

6. Demostrar que

   $$\dot{\Omega}_j(t) = H(t)\Omega_j(t) \left(-3w_j - 1 + \sum_i (1 + 3w_i)\Omega_i(t) \right) .$$

   donde $i, j = R, M$ o Λ. Despreciando la radiación, estudiar el diagrama de fases $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$, caracterizando sus correspondientes puntos fijos y su estabilidad.

7. Derivar la siguiente expresión para la densidad de curvatura, $\Omega_k(z)$,

   $$\Omega_k(z) = \frac{\Omega_k}{\Omega_M(1+z) + \Omega_R(1+z)^2 + \Omega_\Lambda(1+z)^{-2} + \Omega_k} .$$

8. Demostrar que

   $$\dot{\Omega}_k(t) = H(t)\Omega_k(t) \left(2\Omega_R(t) + \Omega_M(t) - 2\Omega_\Lambda(t)\right) .$$

   Estudiar la estabilidad de un universo plano $\Omega_k = 0$.

9. Calcular $a(t)$ para un universo con solo constante cosmológica. Resolver la ecuación fundamental de la cosmología para los tres posibles valores de k. Demostrar que un universo cerrado no ha tenido un Big Bang.

10. Demostrar que un universo plano con cualquier valor positivo de Ω_M, pero con $\Omega_\Lambda < 0$, alcanzará lo que se denomina un Big Crunch. Calcular, además el tiempo hasta este momento.