PROBLEMAS ADICIONALES DE GRAVITACIÓN y COSMOLOGÍA Curso 2016/2016

1. Demostrar que los vectores base (ortonormales) asociados a un observador en caída libre radial en una geometría de Schwarzschild se transportan paralelamente a lo largo de la geodésica que sigue el observador.

   Ayuda. Hartle, pag 441.

2. Considérese el siguiente espacio-tiempo:

   $$ds^2 = -(dt + f(x)dx)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

   Discútase si se trata de un espacio-tiempo plano. ¿Existen coordenadas en las que la métrica toma la forma de Minkowski?

3. Sea el siguiente espacio-tiempo bidimensional

   $$ds^2 = \frac{a^2}{x^2}(-dt^2 + dx^2)\,,\ t \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^+\,,$$

   y a es una constante. Calcular todas las geodésicas.

4. Sea la métrica:

   $$ds^2 = \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2}{(a^2 + \rho^2)^{2\alpha}}\,,\ \rho \in \mathbb{R}^+,\, 0 \leq \phi < 2\pi\,,$$

   con $0 \leq \alpha < 1$. Calcúlese el escalar de curvatura. ¿Qué geometría describe para $a/\rho \ll 1$?

5. Considérense dos vectores definidos sobre la esfera, W_ρ y U^ρ, donde $\rho = \{\theta, \phi\}$. Calcular $\nabla_\nu W_\rho$ y $\nabla_\nu U^\rho$ explícitamente. Como comprobación, verificar que $(\nabla_\nu W_\rho)U^\rho + W_\rho(\nabla_\nu U^\rho) = \partial_\nu(W_\rho U^\rho)$.

6. Calcular la aceleración covariante $a^\mu = Du^\mu/D\tau$ de una partícula en reposo para la métrica de Schwarzschild. Además calcúlse su norma a^2. Demostrar que la fuerza necesaria para que una partícula se mantenga en reposo se hace infinita cuando $r = 2M$.

7. Calcular los tensores de Riemann y de Ricci y el escalar de curvatura para la siguiente métrica

   $$ds^2 = -e^{2\alpha}dt^2 + e^{2\beta}dr^2 + e^{2\gamma}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\,,$$

   en la base ortonormal asociada, donde α, β y γ son solamente funciones de r y de t.

8. Suponiendo un universo plano, despreciando la radiación y considerando que se ha observado una galaxia con $z = 1.55$ y con una edad de 3.5×10^9 años (en el momento de la emisión de la luz), encontrar una cota inferior a Ω_Λ. Asumir $H_0 = 70$ km/s/Mpc.

   [Para obtener mas información sobre este método para la obtención de cotas inferiores de Ω_Λ, consultar por ejemplo, J.S. Alcaniz y J. A. S. Lima , *Astrophys. J.*, **521**, L87 (1999). (arXiv:astro-ph/9902298)].

9. Supóngase un agujero negro de tipo Schwarzschild de masa M.

   - Demostrar que la luz puede seguir una órbita circular con coordenada radial $r = 3M$.
   - Discutir cualitativamente la estabilidad de esta órbita.
   - Calcular el periodo de esta órbita en tiempo coordenado.
   - Calcular el periodo que mediría un observador situado en el infinito.
   - Si hay un observador que está situado en un punto *fijo* de la órbita $r = 3M$, ¿qué periodo observaría?
   - Si la masa del agujero negro es la masa del Sol ($M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg), expresar en metros el radio $r = 3M$.

10. En Septiembre de 2012, la revista Nature [W. Zheng et al, Nature 489, 406 (2012)], publicó un artículo sobre una galaxia en el *cluster* MACS J1149+2223 que presentaba un *redshift* de $z = 9.6$.

- ¿Cuándo fue emitida la luz de esta galaxia?

Si la citada galaxia se formó 200 millones de años depués del *Big Bang*,

- ¿Cuál sería su *redshift* cosmológico en el momento de su formación?
- Calcular la temperatura del CMB en los momentos de formación de la estrella y de la emisión de la luz que recibimos ($z = 9.6$).
- ¿Cuál sería la temperatura de los neutrinos en los dos momentos del apartado anterior?
- ¿Cuál sería su distancia-luminosidad (d_L)? ¿Podrías estimar la diferencia entre las magnitudes relativa y absoluta ($m - M$) de la estrella?

Finalmente,

- ¿Cuál sería la edad del Universo?

Nota. En el material suplementario del citado artículo, los autores usan $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_R = 0$ y $h = 0.7$. Además asumir $T_{\gamma,0} = 2.725$ K.

11. La métrica de Reissner-Nordstrøm

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 ,$$

es una solución a las ecuaciones de Einstein con $\Lambda = 0$ y el tensor de energía-momento producido por un campo electromagnético. Describe el campo graviatatorio de una estrella cargada con simetría esférica o un agujero negro estático cargado. En unidades adecuadas los parámetros M y Q son proporcionales a la masa y la carga de la estrella o agujero negro. En lo que sigue supondremos que $M^2 > Q^2$ ¿Por qué?

- Demuéstrese que una partícula masiva sin carga que cae radialmente no puede alcanzar $r = 0$. Compárese esta situación con lo que sucede en la métrica de Schwarzschild.
- Determínese la coordenada radial, $r_{\rm min}$ de máximo acercamiento para una partícula masiva sin carga que inicialmente se encuentra en reposo en el infinito. Pruébese que $r_{\rm min} < r_-$, donde r_- es la menor raiz de la ecuación:
$$1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0 .$$

12. Supongamos que los astrónomos calculan la edad de una galaxia con *redshift* $z = 2.5$. ¿Cuál debería ser la edad de esta galaxia (cuando emitió la luz) para eliminar la hipótesis $\Omega_M = 1$ con $\Omega_\Lambda = \Omega_R = 0$? Úsese $h = 0.7$.

13. Cuando los piones se aniquilaron por debajo de una temperatura de 140 MeV, las partículas remanentes aumentaron su temperatura. Calcular este incremento de temperatura. Además, calcular el tiempo que necesitó el Universo, desde el Big Bang, en alcanzar $T = 160$ MeV.

14. Demostrar que la corriente $J^\mu \equiv T^{\mu\nu}\xi_\nu$ es conservada ($\nabla_\mu J^\mu = 0$) si $T^{\mu\nu}$ es el tensor simétrico de energía-momento y ξ_ν es un vector de Killing.