Problemas Adicionales. Gravitación y Cosmología. Curso 2018/2019

1. En el artículo `https://arxiv.org/abs/1802.07115` se estudia el efecto de los planetas sobre la Tierra, modelando éstos mediante anillos cuyos radios son el radio de cada uno de los planetas. Esto les permite escribir la siguiente fuerza adicional sobre la Tierra (además de la del Sol)

$$\boldsymbol{F} = \frac{H}{r^3}\boldsymbol{u}_r$$

donde $\boldsymbol{u}_r$ es el vector unitario radial. Los autores calculan $H = -2.33 \times 10^{51}$ kg m^4/s^2 teniendo en cuenta los efectos del resto de los planetas del sistema solar.

Calcular la precesión del perihelio de la Tierra debido a la influencia de los diferentes planetas. ¿En qué dirección es la precesión (en el sentido del movimiento de la Tierra o en el opuesto)? Comparar el resultado con los datos onservacionales. Discutir la validez del cálculo. Buscar alguna aplicación en la literatura.

2. Consideremos un sistema de dos cuerpos, donde hay un cuerpo muy masivo y oblato, y otro, cuya masa es mucho mas pequeã que la del primer cuerpo, que orbita alrededor del primero. Consideraremos que la órbita del segundo cuerpo es en el plano equatorial del primero.

   - Calcular el potencial gravitacional del cuerpo mucho más masivo en su plano equatorial en el orden $O(1/r^3)$.
   - Calcular la precesión del periastro del cuerpo que orbita alrededor del más masivo. Discutir la validez del cálculo.
   - Aplicar los resultados anteriores a la Tierra y a un satélite que orbita en el plano equatorial.
   - Si el satélite no orbita en una órbita equatorial, ¿podrías discutir de manera cualitativa el comportamiento del nodo ascendente de su órbita debido a que la Tierra no es esférica? Buscar alguna aplicación en la literatura.

3. Consideremos que alrededor del Sol, incluyendo la órbita de Mercurio, hay una nube de polvo interestelar esférica con densidad uniforme ρ. Consideraremos que el único efecto de esta nube es modificar el campo gravitatorio que sufre Mercurio.

   - Calcular el potencial gravitatorio que ejercen el Sol y la nube sobre Mercurio.
   - Calcular la precesión del perihelio de Mercurio, debido al efecto de la nube de polvo. Discutir la validez del cálculo confrontándolo con los datos obervacionales que proporcionan un *avance* de $43''$ de arco por siglo para el perihelio de Mercurio.

4. Determinar la potencia n de un potencial central $U(r) \propto 1/r^n$ de tal manera que se pueda obtener una órbita circular que pase por el punto $r = 0$.

5. Una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza dada por

$$\boldsymbol{F} = -\frac{ce^{-r/a}}{r^2}\boldsymbol{u}_r$$

donde c y a son constantes positivas. Demostrar que pueden darse órbitas circulares y determinar la estabilidad de éstas.

Ayuda. En todos los problemas es muy importante repasar el problema de dos cuerpos con fuerzas centrales, por ejemplo, consultando el libro de Mecánica de Landau.

6. Considérese la siguiente métrica

$$ds^2 = dx^2 - x^2 dy^2.$$

- Calcular las ecuaciones de las geodésicas (mediante el método lagrangiano) e identificar los símbolos de Christoffel.
- Calcular un vector de Killing.
- Calcular la cantidad conservada (a lo largo de las geodésicas) asociada al vector de Killing calculado.
- Sean W_ρ y U^ρ dos vectores, donde $\rho = \{x, y\}$. Calcular $\nabla_\nu W_\rho$ y $\nabla_\nu U^\rho$ explícitamente.
- Discutir si este espacio es plano. Justificar la respuesta.

7. Considérese la siguiente métrica

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$$

Calcular las cuatro ecuaciones que se obtienen de la conservación del tensor de energía-momento de un fluido ideal. Considérese $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. ¿Podrías dar una interpretación física de u^μ y justificar su expresión matemática?

8. Considérese el siguiente espacio-tiempo de de Sitter (1+1):

$$ds^2 = -du^2 + \cosh^2 u \; d\phi^2 \,,$$

con $-\infty < u < \infty$ y $0 \leq \phi < 2\pi$.

Calcular:

- Las ecuaciones de las geodésicas y los símbolos de Christoffel (mediante el método lagrangiano).
- Un vector de Killing y su cantidad conservada asociada.
- Calcular $R_{\phi u u \phi}$.
- Los elementos de la base ortonormal $\boldsymbol{e}_{\hat{u}}$ y $\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}$ en función de $\boldsymbol{e}_u$ y $\boldsymbol{e}_\phi$.
- $R^{\hat{u}}{}_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{u}}$ y $R_{\hat{u}\hat{\phi}}{}^{\hat{u}\hat{\phi}}$.
- ¿Es plano este espacio?

9. Consideremos una distribución de materia que produce un campo gravitatorio estático con simetría esférica, de forma que en unas ciertas coordenadas (t, r, θ, ϕ) la métrica se escribe como:

$$ds^2 = -f_1(r)dt^2 + f_2(r)dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \,,$$

donde

$$d\Omega_2^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \,,$$

$$-\infty < t < \infty, \qquad 0 \leq r < \infty, \qquad 0 \leq \theta < \pi, \qquad 0 \leq \phi < 2\pi \,.$$

En estas coordenadas el tensor de energía-momento está dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \,,$$

con $u_\mu = (-\sqrt{f_1(r)}, 0, 0, 0)$ y p y ρ escalares que pueden depender de las cuatro coordenadas.

- Imponiendo que $T^{\mu\nu}$ es conservado, encontrar las ecuaciones diferenciales que satisfacen ρ y p.
- ¿Podrías dar una interpretación física de u^μ y justificar su expresión matemática?

Nota: Las funciones $f_1(r)$ y $f_2(r)$ no son las de la solución de Schwarzschild ya que no estamos en el vacío (hay un tensor $T^{\mu\nu}$).

10. Considérese la siguiente métrica (espacio-tiempo de Rindler)

$$ds^2 = -d\tau^2 = -X^2 dT^2 + dX^2 \,.$$

Calcular:

- Los símbolos de Christoffel.
- Un vector de Killing y su cantidad conservada asociada.
- Las ecuaciones de las gedésicas de género tiempo ($T(\tau)$ y $X(\tau)$).
- La ecuación diferencial (de primer orden) que satisface $T(X)$ para las geodésicas de género tiempo.
- Calcular $X(T)$ para las geodésicas de género luz.
- ¿Es plano este espacio?

11. Deducir una integral (análoga a la que obtuvimos en clase para la edad del universo, en función de H_0 y las diferentes Ω's) para la distancia *propia* al horizonte visible. ¿Cuál será esta distancia propia hoy (en años-luz)? Asumir $h = 0.68$, $\Omega_M = 0.31$, $\Omega_\Lambda = 0.69$ y $\Omega_R = 0$.

Ayuda. Modificar el Notebook de Mathematica para evaluar numéricamente esta integral.

12. Calcular el tiempo necesario para que la temperatura del Universo (temperatura de los fotones) pase de:

(a) $T_i = 7 \times 10^{14}$ K a $T_f = 10^{14}$ K.

(b) $T_i = 5 \times 10^2$ K a $T_f = 5$ K.

Justificar la respuesta.

Nota. $T_{\gamma,0} = 2.725$ K, $h = 0.68$, $\Omega_\Lambda = 0.69$, $\Omega_M = 0.31$ y $\Omega_R = 0$.

$m_{\text{top}} = 172$ GeV/c^2, $m_{\text{Higgs}} = 126$ GeV/c^2, $m_{\text{Z}^0} = 91$ GeV/c^2, $m_{\text{W}^\pm} = 80$ GeV/c^2, $m_{\text{bottom}} = 4.2$ GeV/c^2 y $m_\tau = 1.8$ GeV/c^2.

13. Asumir que $h = 0.7$, $\Omega_\Lambda = 0.4$, $\Omega_M = 0.6$ y $\Omega_R = 0$.

- Calcular la edad del Universo.
- ¿Qué tipo de curvatura presenta este Universo?
- ¿Cuál sería $m - M$ y la distancia-luminosidad (d_L) de una estrella que se ha observado con $z = 3$? d) ¿Cuándo fue emitida la luz de la citada estrella?

14. Los monopolos magnéticos se comportan como materia no relativista. Supongamos que a una temperatura de 3×10^{28} K (era de gran unificación) correpondiente a un tiempo t_{mon}, monopolos magnéticos fueron producidos con una densidad $\Omega(t_{\text{mon}}) = 10^{-10}$. Asumiendo que el universo presentaba la densidad crítica ($k = 0$) y estaba, en la citada época, dominado por la radiación, ¿A qué temperatura la densidad de monopolos igualó a la densidad de la radiación?

En nuestro universo presente aproximadamente $T_0 \simeq 3$ K. Calcular el cociente $\Omega_{\text{mon}}(t_0)/\Omega_R(t_0)$. ¿Es este cociente compatible con las observaciones actuales?

15. Suponiendo que el factor de escala que describe la expansión del universo es:

$$a(t) = (t/t_*)^{1/2}$$

donde t_* es una constante y t es el tiempo propio desde la singularidad. Supóngase también que la edad del Universo en el momento actual es 14 mil millones de años.

- ¿Cuál sería la constante de Hubble (en 1/años) observada hoy?
- ¿A qué edad (en años) la temperatura del fondo cósmico de microondas hubiera sido de 1000 K?