Primer Trabajo. Gravitación y Cosmología. Curso 2019/2020

1. Considérese el siguiente espacio-tiempo de de Sitter (1+1):

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}w^2 + \cosh^2 w \ \mathrm{d}u^2 \,,$$

con $-\infty < w < \infty$ y $0 \leq u < 2\pi$.
Calcular:

- Las ecuaciones de las geodésicas y los símbolos de Christoffel (mediante el método lagrangiano).
- Un vector de Killing y su cantidad conservada asociada.
- Calcular $R_{\phi u u \phi}$.
- Los elementos de la base ortonormal $\boldsymbol{e}_{\hat{w}}$ y $\boldsymbol{e}_{\hat{u}}$ en función de $\boldsymbol{e}_w$ y $\boldsymbol{e}_u$.
- $R^{\hat{u}}{}_{\hat{w}\hat{w}\hat{u}}$ y $R_{\hat{u}\hat{w}}{}^{\hat{u}\hat{w}}$.
- ¿Es plano este espacio?

(6 puntos)

2. Considérese la siguiente métrica:

$$\mathrm{d}s^2 = (z^3)^2(\mathrm{d}z^1)^2 - g(z^3)(\mathrm{d}z^2)^2 + 2\mathrm{d}z^2\mathrm{d}z^3 + (z^3)^2(\mathrm{d}z^4)^2 \,.$$

Calcular:

- Tres vectores de Killing y sus cantidades conservadas asociadas.
- Las ecuaciones de las geodésicas (mediante el método lagrangiano).
- Los símbolos de Christoffel (mediante el método lagrangiano).
- Calcular la cuadrivelocidad de un observador $\boldsymbol{u}$ que tiene las siguientes coordenadas constantes: z^1, z^3 y z^4.
- Calcular el módulo de la cuadriaceleración $a = \sqrt{a_\mu a^\mu}$, donde $a^\mu \equiv u^\nu \nabla_\nu u^\mu$, para el $\boldsymbol{u}$ que ha sido calculado en el apartado anterior.

(4 puntos)

Segundo Trabajo. Gravitación y Cosmología. Curso 2019/2020

1. En el contexto de la geometría de Schwarzschild demostrar la tercera ley de Kepler para un planeta que sigue una órbita circular de radio R:
$$\Omega^2 R^3 = GM\,,$$
con $\Omega = d\phi/dt$.

   Ayuda, la 4-velocidad del planeta en su órbita circular (plano ecuatorial) se escribe como $\boldsymbol{u} = (u^t, 0, 0, u^\phi)$.

   (6 puntos)

2. Describir el mecanismo de Penrose y sus posibles aplicaciones en el contexto de los agujeros negros de tipo Kerr.

   (4 puntos)

Tercer Trabajo. Gravitación y Cosmología. Curso 2019/2020

1. Demostrar las siguientes ecuaciones para d_L (distancia-luminosidad):

   - Si $\Omega_\Lambda = 1$
   $$d_L = \frac{z + z^2}{H_0}\,.$$
   - Para un universo completamente vacío ($\Omega_k = 1$):
   $$d_L = \frac{z + z^2/2}{H_0}\,.$$

   (2.5 puntos)

2. Demostrar ($K = 0$):
   $$\ddot{z} = \frac{\dot{z}^2}{1+z}\left(\frac{5}{2} + \frac{3p}{2\rho}\right)\,.$$

   (2.5 puntos)

3. Calcular el tiempo necesario para que la temperatura del Universo (temperatura de los fotones) pase de:

   (a) $T_i = 5 \times 10^{11}$ K a $T_f = 4 \times 10^{10}$ K.

   (b) $T_i = 300$ K a $T_f = 50$ K.

   Nota. $T_{\gamma,0} = 2.725$ K, $h = 0.67$, $\Omega_V = 0.68$, $\Omega_M = 0.32$ y $\Omega_R = 0$.

   (2.5 puntos)

4. Supongamos que los astrónomos calculan la edad de una galaxia con *redshift* $z = 2.4$. ¿Cuál debería ser la edad de esta galaxia (cuando emitió la luz) para eliminar la hipótesis $\Omega_M = 1$ con $\Omega_\Lambda = \Omega_R = 0$? Úsese $h = 0.67$.

   (2.5 puntos)